

MÉMOIRE DE MASTER 2
UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

Parc Valrose,
06 108 Nice Cedex 2, France

MODÉLISATION MULTI-VOIES
DU TRAFIC ROUTIER

Auteur :
Bastien POLIZZI

Sous la direction de :
Magali RIBOT
Florent BERTHELIN

14 juin 2013

Je tiens tout particulièrement à remercier Mme Ribot qui a encadré la partie numérique de mon stage. Ses encouragements, la pertinence de ses remarques et la richesse de ses connaissances m'ont été d'une aide précieuse. Je tiens également à remercier sincèrement M Berthelin qui a supervisé la partie modélisation de ce stage. Ses conseils avisés et la clarté de ses explications m'ont permis de gagner un temps précieux. Je tiens aussi à les remercier pour le temps qu'ils m'ont consacré et la patience dont ils ont fait preuve tout au long de cet accompagnement.

Je voudrais également remercier M Goudon et Mme Kozinski qui m'ont aidé dans toutes mes démarches administratives auprès de l'INRIA.

Un grand merci également à l'ensemble des professeurs qui m'ont donné le goût des mathématiques et me les ont enseignées.

Table des matières

I	Présentation des modèles	2
II	Étude du modèle à une voie	3
	II.A Existence de solution de type bouchons collants	3
	II.B Lemme d'approximation et lemme de compacité	7
	II.C Existence et propriétés des solutions	11
III	Étude du modèle multi-voies	13
	III.A Solutions de type bouchons collants pour le modèle multi-voies	13
	III.B Variantes pour les lemmes d'approximations et de compacité :	17
	III.C Existence de solutions faibles au problème (I.7)	18
IV	Étude des schémas numériques pour un système d'Euler avec congestion	21
	IV.A Présentation du problème et du schéma numérique	21
	IV.B Schéma semi-implicite en pression	23
	IV.C Comparaison avec le schéma implicite en pression (IV.4)	24
	IV.D Schéma en densité	25
	IV.E Conclusion	27
V	Perspectives	27

I) Présentation des modèles

Les modèles de trafic routier sont fortement inspirés des modèles de mécanique des fluides et peuvent être principalement regroupés en trois catégories, qui sont les suivantes : les modèles cinétiques, les modèles de type particules (par exemple : le modèle Follow-the-Leader) et les modèles de type dynamique des fluides. Bien évidemment, ces différents modèles sont liés et on notera, entre autres, que les modèles de type fluide sont issus des modèles de type particules. Les modèles de type mécanique des fluides décrivent l'évolution dans le temps et l'espace de variables macroscopiques, telles que la vitesse ou la densité. Lorsque ces quantités sont reliées par une équation de conservation telle que :

$$\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0 \tag{I.1}$$

où $\rho(t, x)$ représente la densité de véhicules et $f(\rho)$ le flux associé, on obtient un modèle du premier ordre. Ceux-ci sont notamment dus à Lighthill-Whitham [9] et Richards [10].

En prenant $f(\rho) = \rho u$ où $u(t, x)$ représente la vitesse des voitures et en ajoutant une seconde équation de conservation du moment, on obtient le modèle de Aw-Rascle [1] donné par :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ (\partial_t + u \partial_x)(u + p(\rho)) = 0 \end{cases} \quad p(\rho) = \rho^\gamma. \tag{I.2}$$

Ici p est la réserve de vitesse, par analogie avec la pression en mécanique des fluides. Ce modèle peut être réécrit sous la forme conservative suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho(u + p(\rho))) + \partial_x(\rho u(u + p(\rho))) = 0 \end{cases} \quad p(\rho) = \rho^\gamma. \tag{I.3}$$

Toutefois, ce modèle admet des limites ; par exemple, la condition $\rho \leq \rho^*$, où ρ^* représente la densité maximale de voitures (situation où les voitures sont pare-chocs contre pare-chocs) n'est pas nécessairement préservée.

Nous étudierons, dans un premier temps, les améliorations apportées par [4] qui consistent à redéfinir la réserve de vitesse par

$$p(\rho) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*} \right)^{-\gamma} \quad (\gamma > 0). \tag{I.4}$$

Ainsi, $p \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} \rho^\gamma$ ce qui lui confère le même comportement que pour le modèle de *Aw – Rascle* (I.3) dans les zones de faible densité. Par contre, étant donné que $\lim_{\substack{\rho \rightarrow \rho^* \\ \rho < \rho^*}} p(\rho) = +\infty$, la densité maximale devient une limite qui ne sera jamais atteinte. Finalement, on construit le modèle RMAR (*Rescale Modified Aw-Rascle*) en changeant p en $\varepsilon p(\rho_\varepsilon)$ et en prenant la limite formelle lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$; cette limite est notée \bar{p} . On obtient alors le système avec contraintes :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \quad (\text{I.5a})$$

$$\partial_t(\rho(u + \bar{p})) + \partial_x(\rho u(u + \bar{p})) = 0 \quad (\text{I.5b})$$

$$0 \leq \rho \leq \rho^*, \quad \bar{p} \geq 0, \quad (\rho^* - \rho)\bar{p} = 0. \quad (\text{I.5c})$$

Toutefois, le nombre de voies sur une route peut évoluer ; aussi, [3] propose de prendre en compte ce phénomène. Pour cela, on définit ρ^* par :

$$\rho^*(x) = \sum_{j=0}^M \rho_j^* \mathbb{1}_{]r_j, r_{j+1}[}(x) \quad (\text{I.6})$$

où $(r_j)_{1 \leq j \leq M}$ est une suite croissante réelle et $r_0 = -\infty$, $r_{M+1} = +\infty$. Ainsi, tout changement du nombre de voies a lieu en un point r_j , $j \in \llbracket 1, M \rrbracket$. Pour simplifier, on suppose que sur les sections à une voie la densité maximale est de 1 et de 2 sur une section à deux voies. Le système (I.5) se note alors sous sa forme conservative :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \quad (\text{I.7a})$$

$$\partial_t(\rho(u + \bar{p})I_\alpha) + \partial_x(\rho u(u + \bar{p})I_\alpha) = 0 \quad (\text{I.7b})$$

$$0 \leq \rho \leq \rho^*, \quad \bar{p} \geq 0, \quad (\rho^* - \rho)\bar{p} = 0 \quad (\text{I.7c})$$

où la fonction I_α est définie par :

$$I_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho^*(x) = 1 \\ 1/\alpha & \text{si } \rho^*(x) = 2. \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

Le paramètre α représente le changement de vitesse lors de la modification du nombre de voies, c'est-à-dire qu'une voiture seule sur une route passerait d'une vitesse u à une vitesse αu en entrant dans une zone à deux voies.

Enfin, l'un des objectifs de ce stage est de proposer un schéma numérique pour le système (I.5). Dans ce but nous avons, entre autres étudié le schéma numérique proposé par [7] pour le système d'Euler avec pression (I.4) qui est plus connu et relativement proche du système (I.5).

La structure du mémoire sera la suivante : dans un premier temps, nous montrerons l'existence de solution au problème (I.5) puis nous généraliserons ce résultat au modèle multi-voies donné par (I.7). Pour finir, nous étudierons le schéma numérique proposé dans [7] pour le système d'Euler avec pression (I.4), ainsi que quelques unes de ses variantes.

II) Étude du modèle à une voie

La preuve de l'existence de solutions pour le modèle à une voie se décompose en deux parties principales :

- Existence de solutions pour des données initiales particulières.
- Utilisation de lemmes de compacité pour prouver l'existence de solutions pour des données initiales quelconques.

II.A) Existence de solution de type bouchons collants

Dans cette partie, on considère $\rho(t, x)$ et $\rho(t, x)u(t, x)$ définis par :

$$\rho(t, x) = \sum_{i=1}^N \rho^* \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)} \quad \rho(t, x)u(t, x) = \sum_{i=1}^N \rho^* u_i(t) \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)}$$

tels que $a_1(t) < b_1(t) < a_2(t) < b_2(t) < \dots < b_N(t)$. Le nombre de blocs est constant par morceaux et dépend seulement de t . De plus, tant que deux blocs n'entrent pas en collision, ils se déplacent à une

vitesse constante $u_i(t)$. Localement, lorsque deux blocs entrent en collision au temps t^* et au point x^* la densité est donnée par

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho^* \mathbb{1}_{a_l(t) < x < b_l(t)} + \rho^* \mathbb{1}_{a_r(t) < x < b_r(t)} & \text{si, } t < t^* \\ \rho^* \mathbb{1}_{a(t) < x < b(t)} & \text{si, } t > t^* \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

et le flux est donné par

$$\rho u(t, x) = \begin{cases} \rho^* u_l \mathbb{1}_{a_l(t) < x < b_l(t)} + u_r \rho^* \mathbb{1}_{a_r(t) < x < b_r(t)} & \text{si, } t < t^* \\ \rho^* u_r \mathbb{1}_{a(t) < x < b(t)} & \text{si, } t > t^*. \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Nous avons également

$$a_l(t) = a^* + u_l(t - t^*) \quad b_l(t) = x^* + u_l(t - t^*) \quad (\text{II.3a})$$

$$a_r(t) = x^* + u_r(t - t^*) \quad b_r(t) = b^* + u_r(t - t^*) \quad (\text{II.3b})$$

$$a(t) = a^* + u_r(t - t^*) \quad b(t) = b^* + u_r(t - t^*). \quad (\text{II.3c})$$

Cette configuration est représentée sur la figure 1.

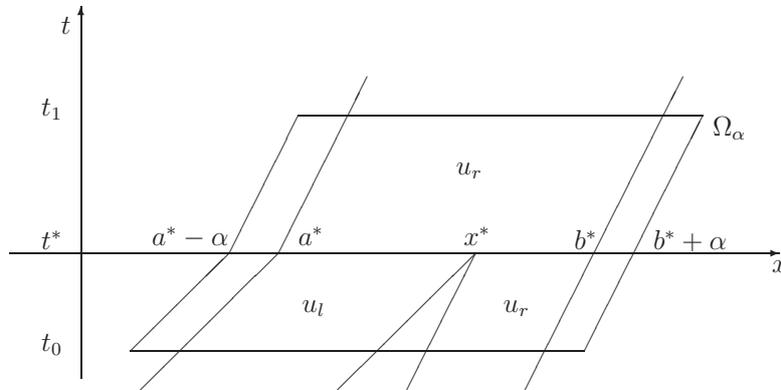


FIGURE 1 – Schéma de la collision de deux blocs (Modèle à une voie).

Théorème : II.1 *Considérons la densité définie par (II.1), le flux défini par (II.2) et les conditions (II.3). Il existe alors une fonction $\bar{p}(t, x)$ positive qui définit une solution de (I.5).*

Preuve : Notons, pour commencer, que tant qu'il n'y a pas de collision, chaque bloc se déplace à une vitesse constante u_i et les quantités ρ et u sont alors solutions du système d'Euler sans pression¹. On peut donc prendre $\bar{p}(t, x) = 0$.

Détaillons ce qui se passe dans le cas où deux blocs entrent en collision au temps t^* et au point x^* . Notons, au passage, que le cas de plusieurs collisions simultanées peut être traité de manière analogue. Il existe $\alpha > 0, t_0$ et t_1 tels que sur l'ensemble Ω_α défini par

$$\Omega_\alpha = \left\{ (t, x) \begin{cases} t_0 < t \leq t^* & \text{et } a^* + u_l(t - t^*) - \alpha < x < b^* + u_r(t - t^*) + \alpha \\ \text{ou } t^* < t < t_1 & \text{et } a^* + u_l(t - t^*) - \alpha < x < b^* + u_r(t - t^*) + \alpha \end{cases} \right\}$$

avec les notations précédentes, il y a une seule collision. On définit $u(t, x)$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u \equiv u_i(t)$ sur chaque bloc i , on prolonge linéairement u entre deux blocs successifs et u est constante à $\pm\infty$. Ainsi, la fonction u est lipschitzienne, donc continue. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\alpha)$, alors pour toute fonction

1. $\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ (\partial_t + u \partial_x)(u) = 0 \end{cases}$ et $\rho \neq 0$.

continue S et pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité pour les distributions, nous avons

$$\begin{aligned}
& \langle \partial_t (\rho S(u)) + \partial_x (\rho u S(u)), \varphi \rangle \\
&= - \langle \rho S(u), \partial_t \varphi \rangle - \langle \rho u S(u), \partial_x \varphi \rangle \\
&= - \int_{t_0}^{t^*} \left(\int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \rho^* S(u_l) \partial_t \varphi dx + \int_{a_r(t)}^{b_r(t)} \rho^* S(u_r) \partial_t \varphi dx \right) dt - \int_{t^*}^{t_1} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho^* S(u_r) \partial_t \varphi dx dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t^*} \left(\int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \rho^* u_r S(u_l) \partial_x \varphi dx + \int_{a_r(t)}^{b_r(t)} \rho^* u_r S(u_r) \partial_x \varphi dx \right) dt - \int_{t^*}^{t_1} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho^* u_r S(u_r) \partial_x \varphi dx dt \\
&= - \int_{t_0}^{t^*} \left(\int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \rho^* S(u_l) (\partial_t \varphi + u_l \partial_x \varphi) dx + \int_{a_r(t)}^{b_r(t)} \rho^* S(u_r) (\partial_t \varphi + u_r \partial_x \varphi) dx \right) dt \\
&\quad - \int_{t^*}^{t_1} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho^* S(u_r) (\partial_t \varphi + u_r \partial_x \varphi) dx dt. \tag{II.4}
\end{aligned}$$

Soit ϕ une primitive en x de $\varphi(t, x)$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \varphi(t, x) dx \right] &= \frac{d}{dt} [\phi(t, b_l(t)) - \phi(t, a_l(t))] \\
&= (\partial_t \phi)(t, b_l(t)) + b'_l(t) \partial_x \phi(t, b_l(t)) - (\partial_t \phi)(t, a_l(t)) - a'_l(t) \partial_x \phi(t, a_l(t)) \\
&= \int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \partial_t \varphi(t, x) dx + b'_l(t) \varphi(t, b_l(t)) - a'_l(t) \varphi(t, a_l(t)).
\end{aligned}$$

D'après les conditions établies en (II.3a), nous avons $a'_l = b'_l = u_l$, donc

$$- \int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \partial_t \varphi(t, x) dx = - \frac{d}{dt} \left[\int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \varphi(t, x) dx \right] + u_l \varphi(t, b_l(t)) - u_l \varphi(t, a_l(t)). \tag{II.5}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t^*} \frac{d}{dt} \left[\int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \varphi(t, x) dx \right] dt &= \left[\int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \varphi(t, x) dx \right]_{t_0}^{t^*} \\
&= \int_{a^*}^{x^*} \varphi(t^*, x) dx - \int_{a_l(t_0)}^{b_l(t_0)} \varphi(t_0, x) dx \\
&= \int_{a^*}^{x^*} \varphi(t^*, x) dx.
\end{aligned}$$

Par intégration de (II.5) entre t_0 et t^* , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^{t^*} \int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \rho^* S(u_l) \partial_t \varphi(t, x) dx dt \\
&= - \int_{a^*}^{x^*} \rho^* S(u_l) \varphi(t^*, x) dx + \int_{t_0}^{t^*} \rho^* S(u_l) u_l \varphi(t, b_l(t)) dt - \int_{t_0}^{t^*} \rho^* S(u_l) u_l \varphi(t, a_l(t)) dt.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour un terme faisant apparaître la quantité $\partial_x \varphi$ nous avons directement

$$- \int_{t_0}^{t^*} \int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \rho^* u_l S(u_l) \partial_x \varphi dx dt = - \int_{t_0}^{t^*} \rho^* u_l S(u_l) \varphi(t, b_l(t)) dt + \int_{t_0}^{t^*} \rho^* u_l S(u_l) \varphi(t, a_l(t)) dt.$$

Nous obtenons alors

$$- \int_{t_0}^{t^*} \int_{a_l(t)}^{b_l(t)} \rho^* S(u_l) (\partial_t \varphi + u_l \partial_x \varphi) dx = - \int_{a^*}^{x^*} \rho^* S(u_l) \varphi(t^*, x) dx. \tag{II.6}$$

De même que pour (II.5), nous avons les égalités suivantes :

$$-\int_{a_r(t)}^{b_r(t)} \partial_t \varphi(t, x) dx = -\frac{d}{dt} \left[\int_{a_r(t)}^{b_r(t)} \varphi(t, x) dx \right] + u_r \varphi(t, b_r(t)) - u_r \varphi(t, a_r(t)) \quad (\text{II.7a})$$

$$\int_{t_0}^{t^*} \frac{d}{dt} \left[\int_{a_r(t)}^{b_r(t)} \varphi(t, x) dx \right] dt = \int_{x^*}^{b^*} \varphi(t^*, x) dx \quad (\text{II.7b})$$

$$-\int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t \varphi(t, x) dx = -\frac{d}{dt} \left[\int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(t, x) dx \right] + u_r \varphi(t, b(t)) - u_r \varphi(t, a(t)) \quad (\text{II.7c})$$

$$\int_{t^*}^{t_1} \frac{d}{dt} \left[\int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(t, x) dx \right] dt = -\int_{a^*}^{b^*} \varphi(t^*, x) dx \quad (\text{II.7d})$$

Par intégration de (II.7a) entre t_0 et t^* et de (II.7c) entre t^* et t_1 , nous obtenons

$$\begin{aligned} & -\int_{t_0}^{t^*} \int_{a_r(t)}^{b_r(t)} \rho^* S(u_r) \partial_t \varphi(t, x) dx dt \\ &= -\int_{x^*}^{b^*} \rho^* S(u_r) \varphi(t^*, x) dx + \int_{t_0}^{t^*} \rho^* S(u_r) u_r \varphi(t, b_r(t)) dt - \int_{t_0}^{t^*} \rho^* S(u_r) u_r \varphi(t, a_r(t)) dt \end{aligned} \quad (\text{II.8a})$$

$$\begin{aligned} & -\int_{t^*}^{t_1} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho^* S(u_r) \partial_t \varphi(t, x) dx dt \\ &= \int_{a^*}^{b^*} \rho^* S(u_r) \varphi(t^*, x) dx + \int_{t_0}^{t^*} \rho^* S(u_r) u_r \varphi(t, b(t)) dt - \int_{t_0}^{t^*} \rho^* S(u_r) u_r \varphi(t, a(t)) dt. \end{aligned} \quad (\text{II.8b})$$

Par ailleurs pour les termes faisant apparaître la quantité $\partial_x \varphi$, nous avons directement

$$-\int_{t_0}^{t^*} \int_{a_r(t)}^{b_r(t)} \rho^* u_r S(u_r) \partial_x \varphi dx dt = -\int_{t_0}^{t^*} \rho^* u_r S(u_r) \varphi(t, b_r(t)) dt + \int_{t_0}^{t^*} \rho^* u_r S(u_r) \varphi(t, a_r(t)) dt \quad (\text{II.9a})$$

$$-\int_{t^*}^{t_1} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho^* u_r S(u_r) \partial_x \varphi dx dt = -\int_{t^*}^{t_1} \rho^* u_r S(u_r) \varphi(t, b(t)) dt + \int_{t_0}^{t^*} \rho^* u_r S(u_r) \varphi(t, a(t)) dt. \quad (\text{II.9b})$$

Nous obtenons donc d'après (II.4), (II.6), (II.8) et, (II.9) que

$$\begin{aligned} \langle \partial_t (\rho S(u)) + \partial_x (\rho u S(u)), \varphi \rangle &= -\int_{a^*}^{x^*} \rho^* S(u_l) \varphi(t^*, x) dx - \int_{x^*}^{b^*} \rho^* S(u_r) \varphi(t^*, x) dx + \int_{a^*}^{b^*} \rho^* S(u_r) \varphi(t^*, x) dx \\ &= \int_{a^*}^{x^*} [\rho^* S(u_r) - \rho^* S(u_l)] \varphi(t^*, x) dx. \end{aligned}$$

Et donc

$$\partial_t (\rho S(u)) + \partial_x (\rho u S(u)) = \delta(t - t^*) \rho^* [S(u_r) - S(u_l)] \mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x) \quad (= Q^S). \quad (\text{II.10})$$

Clairement pour $S = 1$, nous avons l'équation de conservation du nombre de voitures. D'autre part, pour $S(u) = u$, nous obtenons la quantité

$$\partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2) = \delta(t - t^*) \rho^* [u_r - u_l] \mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x)$$

qui est négative tant que $u_r \leq u_l$. On note \mathcal{H} la fonction de Heaviside et on définit les quantités positives $\rho^* \bar{p}$ et $\rho^* \bar{p}u$ par

$$\begin{aligned} \rho^* \bar{p}(t, x) &= \mathcal{H}(t - t^*) \rho^* (u_l - u_r) \mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x - u_r(t - t^*)) \\ \rho^* \bar{p}u(t, x) &= u_r \mathcal{H}(t - t^*) \rho^* (u_l - u_r) \mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x - u_r(t - t^*)). \end{aligned}$$

Alors, au sens des distributions, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho^* \bar{p}(t, x)) &= \delta(t - t^*) \rho^* (u_l - u_r) \mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x - u_r(t - t^*)) \\ &\quad + \mathcal{H}(t - t^*) \rho^* (u_l - u_r) [-u_r \delta(x - u_r(t - t^*) - a^*) + u_r \delta(x - u_r(t - t^*) - x^*)] \\ \partial_x (\rho^* \bar{p}u(t, x)) &= u_r \mathcal{H}(t - t^*) \rho^* (u_l - u_r) [\delta(x - u_r(t - t^*) - a^*) - \delta(x - u_r(t - t^*) - x^*)]. \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que (I.5b) est donnée par

$$\partial_t (\rho(u + p(\rho))) + \partial_x (\rho u(u + p(\rho))) = \delta(t - t^*) \rho^* (u_r - u_l) [\mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x) - \mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x - u_r(t - t^*))],$$

qui est bien nulle. ■

Remarque :

D'après la relation (II.10), nous avons

$$\partial_t (\rho S(u) + \rho \bar{p}^S) + \partial_x (\rho u S(u) + \rho u \bar{p}^S) = 0 \quad (\text{II.11})$$

avec

$$\rho \bar{p}^S(t, x) = \mathcal{H}(t - t^*) \rho^* (S(u_l) - S(u_r)) \mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x - u_r(t - t^*))$$

sur l'ensemble Ω_α . On définit $\bar{p}^S(t, x)$ pour tout x de la même manière que \bar{p} et nous remarquons que pour tout compact K , nous avons

$$\begin{aligned} TV_K(\rho \bar{p}^S) &= TV_K \left(\mathcal{H}(t - t^*) \rho^* \int_{u_l}^{u_r} S'(\xi) d\xi \mathbb{1}_{[a^*, x^*]}(x - u_r(t - t^*)) \right) \\ &\leq \rho^* \|S'\|_{\tilde{K}} |u_r - u_l| \\ &\leq \rho^* \|S'\|_{\tilde{K}} TV_K(u). \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

II.B) Lemme d'approximation et lemme de compacité

Lemme : 1 Soit $\rho^0 \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \rho^0 \leq \rho^*$ et $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors, il existe une suite de conditions initiales $(\rho_k^0)_{k \geq 0}$ et $(\rho_k^0 u_k^0)_{k \geq 0}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} \rho_k^0(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \rho^0(x) dx$ et $\text{essinf } u^0 \leq u_k^0 \leq \text{esssup } u^0$ et telles que, au sens des distributions, nous avons les convergences suivantes : $\rho_k^0 \rightharpoonup \rho^0$ et, $\rho_k^0 u_k^0 \rightharpoonup \rho^0 u^0$.

Preuve : Quitte à considérer $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho^*}$, on suppose dans la suite que $\rho^* = 1$. Soit $\varepsilon > 0$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_n^0(x) = \sum_{\substack{i=-n^2 \\ m_{in} > 0}}^{n^2} \mathbb{1}_{\lfloor \frac{i}{n}, \frac{i}{n} + m_{in} \rfloor}(x) \quad u_n^0(x) = \sum_{\substack{i=-n^2 \\ m_{in} > 0}}^{n^2} u_{in} \mathbb{1}_{\lfloor \frac{i}{n}, \frac{i}{n} + m_{in} \rfloor}(x),$$

où les quantités m_{in} et u_{in} sont définies par :

$$m_{in} = \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}} \rho^0(x) dx \quad u_{in} = \frac{1}{m_{in}} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}} \rho^0(x) u^0(x) dx. \quad (\text{II.13})$$

Étant donné que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{i}{n} - \left(\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

et comme $0 \leq \rho^0 \leq 1$, on en déduit que $0 \leq m_{in} \leq \frac{1}{n}$. De plus, u_{in} est bien défini seulement pour $m_{in} \neq 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{supp}(\varphi) \in [-N; N]$ et nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_n^0(x) \varphi(x) dx = \int_{-N}^N \sum_{\substack{i=-n^2 \\ m_{in} > 0}}^{n^2} \mathbb{1}_{\lfloor \frac{i}{n}, \frac{i}{n} + m_{in} \rfloor}(x) \varphi(x) dx = \sum_{\substack{i=-n^2 \\ m_{in} > 0}}^{n^2} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n} + m_{in}} \varphi(x) dx = \sum_{i=-n^2}^{n^2} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n} + m_{in}} \varphi(x) dx. \quad (\text{II.14})$$

Soit ϕ une primitive de φ . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n} + m_{in}} \varphi(x) dx &= \phi \left(\frac{i}{n} + m_{in} \right) - \phi \left(\frac{i}{n} \right) \\ &= \phi \left(\frac{i}{n} \right) + m_{in} \phi' \left(\frac{i}{n} \right) + \frac{m_{in}^2}{2} \phi''(x_n^i) - \phi \left(\frac{i}{n} \right) \quad \text{où, } x_n^i \in \left[\frac{i}{n}; \frac{i}{n} + m_{in} \right] \\ &= m_{in} \varphi \left(\frac{i}{n} \right) + \frac{m_{in}^2}{2} \varphi'(x_n^i). \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Pour $n \geq N$ nous avons

$$\begin{aligned}
|\langle \rho_n^0 - \rho^0; \varphi \rangle| &= \left| \int_{-N}^N \rho_n^0(x) \varphi(x) dx - \int_{-N}^N \rho^0(x) \varphi(x) dx \right| \\
&= \left| \sum_{i=-n^2}^{n^2} \left[m_{in} \varphi(i/n) + \frac{m_{in}^2}{2} \varphi'(x_n^i) \right] - \int_{-N}^N \rho^0(x) \varphi(x) dx \right| \quad \text{par (II.14) et (II.15)} \\
&= \left| \sum_{i=-n^2}^{n^2} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}} \rho^0(x) \varphi(i/n) dx + \sum_{i=-n^2}^{n^2} \frac{m_{in}^2}{2} \varphi'(x_n^i) - \int_{-N}^N \rho^0(x) \varphi(x) dx \right| \quad (\text{cf (II.13)}) \\
&\leq \sum_{i=-n^2}^{n^2} \frac{m_{in}^2}{2} |\varphi'(x_n^i)| + \sum_{i=-n^2}^{n^2} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}} |\varphi(i/n) - \varphi(x)| dx + \sum_{i=-n^2}^{n^2} \int_{\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{i+1}{n}} |\varphi(x)| dx.
\end{aligned} \tag{II.16}$$

Notons M un majorant de φ et de sa dérivée et traitons séparément chacun des trois termes,

- a. Le terme $\varphi(x_n^i)$ est potentiellement non nul si $x_n^i \in [-N; N]$. Or, $x_n^i \in [\frac{i}{n}; \frac{i}{n} + m_{in}] \subset [\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}]$ donc pour $i \notin [-nN, nN - 1]$, $\varphi(x_n^i) = 0$ et comme $m_{in} \leq \frac{1}{n}$ nous en déduisons que

$$\sum_{i=-n^2}^{n^2} \frac{m_{in}^2}{2} |\varphi'(x_n^i)| \leq \sum_{i=-nN}^{nN-1} \frac{M}{2n^2} = \frac{MN}{n}. \tag{II.17}$$

- b. L'intégrale $\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}} |\varphi(i/n) - \varphi(x)| dx$ est nulle si $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ n'est pas dans le support de φ c'est à dire pour $i < -nN$ et $i > nN - 1$. D'autre part, la fonction φ est continue sur le compact $[-N, N]$ donc uniformément continue et, par conséquent

$$\exists \mu > 0 \text{ / si } \left| x - \frac{i}{n} \right| < \mu, \quad \left| \varphi(x) - \varphi\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Soit \tilde{N} tel que $\frac{1}{\tilde{N}} < \mu$ alors pour $n \geq \max\{N, \tilde{N}\}$, nous avons

$$\sum_{i=-n^2}^{n^2} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}} |\varphi(i/n) - \varphi(x)| dx \leq \sum_{i=-nN}^{nN-1} \frac{\varepsilon}{n} = 2N\varepsilon.$$

- c. Comme précédemment $\int_{\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{i+1}{n}} |\varphi(x)| dx$ est nulle si $[\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}; \frac{i+1}{n}] \notin [-N; N]$. Par conséquent,

$$\sum_{i=-n^2}^{n^2} \int_{\frac{i+1}{n} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{i+1}{n}} |\varphi(x)| dx \leq \sum_{i=-nN}^{nN-1} \frac{M}{n^2} = 2 \frac{MN}{n}. \tag{II.18}$$

Soit N_0 tel que $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ et $N_0 > \max\{N, \tilde{N}\}$ alors, d'après (II.16), (II.17) et (II.18), on a

$$\forall n \geq N_0, \quad |\langle \rho_n^0 - \rho^0; \varphi \rangle| \leq 3MN \frac{1}{n} + 2N\varepsilon \leq N(3M + 2)\varepsilon.$$

On en déduit donc que $\langle \rho_n^0, \varphi \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle \rho^0, \varphi \rangle$ et donc que $\rho_n^0 \rightharpoonup \rho^0$ au sens des distributions. On démontre de manière analogue la convergence de la suite $(\rho_n^0 u_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Lemme : 2 *Supposons que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ et qu'elle converge vers γ dans $L_{\omega^*}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ et que pour toute fonction $\Gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R})$:*

$$\int_{\mathbb{R}} (\gamma_n - \gamma)(t, x) \Gamma(x) dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \tag{II.19}$$

i) pour tout $t \in [0, T]$ ou, ii) dans $L_t^1(]0, T[)$. Supposons également que la suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ et qu'elle converge vers ω dans $L_{\omega^}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ et que pour tout intervalle compact $K = [a, b]$, il existe $C > 0$ tel que pour $\beta = \omega$ ou ω_n , la variation totale de β sur K satisfait la relation :*

$$TV_K(\beta(t, \cdot)) \leq C \left(\frac{1}{t} + 1 \right).$$

Alors $\gamma_n \omega_n \rightharpoonup \gamma \omega$ dans $L_{\omega^}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ lorsque $k \rightarrow \infty$.*

Ce lemme est l'un des points clés de la preuve de l'existence de solutions au problème (I.5). C'est un résultat de compacité par compensation, qui utilise la compacité en espace de la suite ω_k et la compacité en temps de la suite γ_k pour passer à la limite faible dans le produit $\gamma_k \omega_k$. Afin de démontrer ce résultat, nous montrerons dans un premier temps le lemme ci-dessous.

Remarque : Dans la suite, ζ^ε est une suite régularisante telle que $\text{supp}(\zeta^\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ et nous utiliserons la notation $z^\varepsilon = z * \zeta^\varepsilon$.

Lemme : 3 *Soit $\varepsilon > 0$ et $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée de $L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ qui converge vers γ dans $L_{\omega^*}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ et qui vérifie l'équation (II.19) i) pour tout $t \in [0, T]$ ou, ii) dans $L_t^1(]0, T[)$. Supposons également que la suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$. Alors, nous avons $(\gamma_n - \gamma) \omega_n^\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L_{\omega^*}^\infty$.*

Preuve : On se place dans le cas ii), le cas i) étant déjà détaillé dans [2]. On considère une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ telle que $\varphi(t, x) = \varphi_t(t) \varphi_x(x)$ avec $\varphi_t(t) \in C_c^\infty(]0, T[)$ et $\varphi_x \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On cherche à démontrer que

$$J_n = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\gamma_n - \gamma)(t, x) \omega_n^\varepsilon(t, x) \varphi_t(t) \varphi_x(x) dx dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

avec $\omega_n^\varepsilon = \omega_n * \zeta^\varepsilon$. On pose

$$J_n = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} I_n(t, y) dy dt \quad \text{avec} \quad I_n(t, y) = \omega_n(t, y) \int_{\mathbb{R}} (\gamma_n - \gamma)(t, x) \zeta^\varepsilon(x - y) \varphi(t, x) dx$$

Notons que pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto \zeta^\varepsilon(x - y) \varphi(t, x)$ est C^∞ à support compact dans \mathbb{R} . D'autre part, les suites $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées dans $L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$. Soit M un majorant. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |I_n(t, y)| &\leq M \left| \int_{\mathbb{R}} (\gamma_n - \gamma)(t, x) \zeta^\varepsilon(x - y) \varphi(t, x) dx \right| \\ \int_0^T |I_n(t, y)| dt &\leq \int_0^T M \left| \int_{\mathbb{R}} (\gamma_n - \gamma)(t, x) \zeta^\varepsilon(x - y) \varphi_x(x) dx \varphi_t(t) \right| dt \\ &\leq M \|\varphi_t\|_\infty \underbrace{\int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}} (\gamma_n - \gamma)(t, x) \zeta^\varepsilon(x - y) \varphi_x(x) dx \right| dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par hypothèse (II.19)}} \end{aligned}$$

Donc, pour presque tout $(t, y) \in]0, T[\times \mathbb{R}$, $I_n(t, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'autre part, nous avons aussi l'estimation suivante

$$|I_n(t, y)| \leq M \left(M + \|\gamma\|_{L_{t,x}^\infty} \right) \int_{\mathbb{R}} \zeta^\varepsilon(x - y) |\varphi(t, x)| dx$$

et la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} \zeta^\varepsilon(x - y) |\varphi(t, x)| dx$ est une fonction $L^1(]0, T[\times \mathbb{R})$. Donc, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. ■

Preuve : (du lemme (2)) On écrit la décomposition suivante :

$$\gamma_n \omega_n - \gamma \omega = \gamma_n (\omega_n - \omega_n^\varepsilon) + (\gamma_n - \gamma) \omega_n^\varepsilon + \gamma (\omega_n^\varepsilon - \omega^\varepsilon) + (\omega^\varepsilon - \omega) \gamma.$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ et, $\eta > 0$.

• Dans un premier temps, nous allons traiter le cas du premier et du quatrième terme que nous contrôlerons uniformément en n pour ε suffisamment petit. Étant donné que ω_n est à variations bornées en x , nous avons

$$\int_a^b |\omega_n(t, x - y) - \omega_n(t, x)| dx \leq |y| TV_{\tilde{K}}(\omega_n(t, \cdot)) \quad \text{avec, } \tilde{K} = [a - 2|y|, b + 2|y|].$$

En effet, si f une fonction continue sur \mathbb{R} et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors, pour $h > 0, N \in \mathbb{N}$ tels que $a + (N - 1)h < b \leq a + Nh$, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x-h) - f(x)| dx &= \sum_{k=0}^N \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} |f(x-h) - f(x)| dx \\ &= \sum_{k=0}^N \int_0^h |f(s+a+(k-1)h) - f(s+a+kh)| .ds \\ &= \int_0^h \left(\sum_{k=0}^N |f(s+a+(k-1)h) - f(s+a+kh)| \right) .ds \\ &\leq |h| TV_{\tilde{K}}(f) \end{aligned}$$

avec $\tilde{K} = [a - 2|h|, b + 2|h|]$. Cette relation se généralise au cas où $h = 0$ et $h < 0$ puis, par densité aux fonctions L^∞ .

Soit $\varepsilon < 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_{\mathbb{R}} [\omega_n(t, x-y) - \omega_n(t, x)] \zeta^\varepsilon(y) dy \right| dx &\leq \int_a^b \left| \int_{-\varepsilon}^\varepsilon [\omega_n(t, x-y) - \omega_n(t, x)] \zeta^\varepsilon(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \int_a^b |\omega_n(t, x-y) - \omega_n(t, x)| \zeta^\varepsilon(y) dx dy \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^\varepsilon |y| TV_{[a-2\varepsilon, b+2\varepsilon]}(\omega_n(t, \cdot)) \zeta^\varepsilon(y) dy \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \varepsilon TV_{[a-2, b+2]}(\omega_n(t, \cdot)) \zeta^\varepsilon(y) dy \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \varepsilon C_{\tilde{K}} \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \zeta^\varepsilon(y) dy \\ &\leq \varepsilon C_{\tilde{K}} \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \end{aligned}$$

avec $\tilde{K} = [a - 2, b + 2]$ et $C_{\tilde{K}}$ indépendante de ε et de n . La fonction φ étant à support compact, on peut choisir K de sorte que $\text{supp}_x(\varphi) \subset K$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\text{supp}_t(\varphi) \subset [\delta, T]$. Les suites $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ et convergent respectivement vers ω et γ dans $L_{\omega^*}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$.

Donc il existe M indépendant de n tel que $M \geq \|\alpha\|_\infty$ avec $\alpha \in \left\{ (\gamma_n)_{n \geq 0}, (\omega_n)_{n \geq 0}, \gamma, \omega \right\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma_n (\omega_n^\varepsilon - \omega_n) \varphi dx dt \right| &\leq \|\gamma_n\|_\infty \int_\delta^T \int_a^b |\omega_n^\varepsilon - \omega_n| |\varphi| dx dt \\ &\leq M \|\varphi\|_\infty \int_\delta^T \varepsilon C_{\tilde{K}} \left(\frac{1}{t} + 1 \right) dt \\ &\leq \varepsilon M \|\varphi\|_\infty C_{\tilde{K}} \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right) T. \end{aligned}$$

Donc, pour ε assez petit, nous avons $\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma_n (\omega_n^\varepsilon - \omega_n) \varphi dx dt \right| < \eta$ indépendamment de n . Par le même raisonnement, nous pouvons montrer que $\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma (\omega^\varepsilon - \omega) \varphi dx dt \right| < \eta$.

- Pour le terme $\gamma (\omega_n^\varepsilon - \omega^\varepsilon)$ nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma (\omega_n^\varepsilon - \omega^\varepsilon) \varphi dx dt \right| &= \left| \int_0^T \int_a^b \gamma \int_{\mathbb{R}} (\omega_n - \omega) (t, y) \zeta^\varepsilon(x-y) dy \varphi dx dt \right| \\ &= \int_a^b \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\omega_n - \omega) (t, y) \zeta^\varepsilon(x-y) \varphi(t, x) \gamma(t, x) dy dt \right) dx. \end{aligned}$$

Pour $x \in [a, b]$ fixé, la fonction $(t, y) \mapsto \zeta^\varepsilon(x-y) \varphi(t, x) \gamma(t, x)$ est une fonction $L^1_{t,y}$ car γ et φ sont bornées et ζ^ε est L^1 . Par hypothèse nous avons $\omega_n \rightarrow \omega$ dans $L_{\omega^*}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$. Donc, nous en déduisons que la suite $f_n(x) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\omega_n - \omega) (t, y) \zeta^\varepsilon(x-y) \varphi(t, x) \gamma(t, x) dy dt$ tend vers 0 pour tout x et est bornée par $2M^2 \|\varphi\|_\infty$ donc, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \gamma (\omega_n^\varepsilon - \omega^\varepsilon) \varphi dy dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

• Le terme $(\gamma_n - \gamma)\omega_n^\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L_{\omega^*}^\infty$ par le lemme (3). On en déduit donc que $\gamma_n\omega_n \rightarrow \gamma\omega$ dans $L_{\omega^*}^\infty([0, T[\times\mathbb{R}))$ lorsque $n \rightarrow \infty$ ■

II.C) Existence et propriétés des solutions

Propriété : II.1 *On considère une suite de solutions $(\rho_n, u_n, \bar{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au problème (I.5) avec les régularités suivantes :*

$$\rho_n \in L_t^\infty([0, \infty[; L_x^\infty(\mathbb{R}) \cap L_x^1(\mathbb{R})) \quad (\text{II.20a})$$

$$u_n, \bar{p}_n \in L_t^\infty([0, \infty[; L_x^\infty(\mathbb{R})) \quad (\text{II.20b})$$

et telle que les donnée initiales correspondantes vérifient les conditions

$$0 \leq \rho_n^0 \leq \rho^*, \quad (\rho_n^0)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite bornée de } L^1(\mathbb{R}) \\ (u_n^0)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite bornée de } L^\infty(\mathbb{R}).$$

On suppose également que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\partial_t u_n(t, x) \leq \frac{1}{t} \quad (\text{II.21a})$$

$$\text{essinf}_y u_n^0(y) \leq u_n(t, x) \leq \text{esssup}_y u_n^0(y) \quad (\text{II.21b})$$

$$TV_K(\rho_n \bar{p}_n(t, \cdot)) \leq 2\rho^* TV_K(u_n(t, \cdot)) \quad \text{pour tout compact } K \quad (\text{II.21c})$$

$$0 \leq \bar{p}_n(t, x) \leq \text{esssup}_y u_n^0(y). \quad (\text{II.21d})$$

Alors, quitte à extraire une sous-suite, nous avons $(\rho_n, u_n, \bar{p}_n) \rightarrow (\rho, u, \bar{p})$, c'est-à-dire que

$$\rho_n \rightarrow \rho, \quad u_n \rightarrow u, \quad \bar{p}_n \rightarrow \bar{p}, \quad \text{dans } L_{\omega^*}^\infty([0, T[\times\mathbb{R}))$$

où (ρ, u, \bar{p}) a la régularité de (II.20) et vérifie le système (I.5) pour les données initiales ρ^0 et u^0 définies par

$$\rho_n^0 \rightarrow \rho^0 \text{ dans } L_{\omega^*}^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{et} \quad \rho_n^0 u_n^0 \rightarrow \rho^0 u_n^0 \text{ dans } L_{\omega^*}^\infty(\mathbb{R}).$$

Les solutions obtenues satisfont également (II.21a), (II.21b) et (II.21d).

Preuve : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'inégalité (II.21b) donc on en déduit qu'elle est bornée dans $L^\infty([0, T[\times\mathbb{R}))$. La suite $(\bar{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également bornée d'après l'inégalité (II.21d) et, par produit de suites bornées, la suite $(\rho_n^0 u_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi bornée. Aussi, quitte à extraire des sous-suites, il existe u, \bar{p}, ρ^0, m^0 tels qu'on ait les convergences faibles suivantes dans $L_{\omega^*}^\infty([0, T[\times\mathbb{R}))$: $u_n \rightarrow u, \bar{p}_n \rightarrow \bar{p}, \rho_n^0 \rightarrow \rho^0, \rho_n^0 u_n^0 \rightarrow m^0 = \rho^0 u^0$.

D'autre part, pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $t > 0$, d'après (I.5a), nous avons

$$\int_0^t [\partial_t \rho_n(s, x) + \partial_x(\rho_n u_n)(s, x)] \varphi(x) dx ds = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} (\rho_n(t, x) - \rho_n(0, x)) \varphi(x) dx = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho_n u_n(s, x) \partial_x \varphi(x) ds dx \\ \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t, x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(0, x) \varphi(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho_n u_n(s, x) \partial_x \varphi(x) ds dx \\ \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t, x) \varphi(x) dx \right| \leq \rho^* M_\varphi + T \rho^* \|u_n^0\|_\infty M_\varphi,$$

où M_φ est une constante qui ne dépend que de φ . Comme $(u_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞ , on en déduit que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $C_t([0, T]; \mathcal{D}'_x)$, où \mathcal{D}'_x est munit de la topologie faible par rapport à la variable x . Cette suite est aussi bornée par ρ^* dans $L^\infty([0, T[\times\mathbb{R}))$. Donc, quitte à extraire une sous-suite elle converge dans $C_t([0, T]; L_{\omega^*}^\infty(\mathbb{R}))$. De même, on montre qu'il existe q tel que, quitte à extraire une sous-suite, $\rho_n(u_n + \bar{p}_n)$ converge vers q dans $C_t([0, T]; L_{\omega^*}^\infty(\mathbb{R}))$.

D'autre part, pour $\beta = u_n, n \geq 0$ ou $\beta = u$ nous avons

$$\int_a^b |\partial_x \beta| dx - \int_a^b \frac{1}{t} dx \int_a^b \left| \partial_x \beta - \frac{1}{t} \right| dx. \quad (\text{II.22})$$

D'après (II.21a) $\partial_x \beta - \frac{1}{t} \leq 0$, donc

$$\int_a^b |\partial_x \beta| dx \leq \frac{b-a}{t} - \int_a^b \partial_x \beta - \frac{1}{t} dx \leq 2 \frac{b-a}{t} - \beta(t, b) + \beta(t, a) \leq 2 \frac{b-a}{t} + 2 \|\beta^0\|_\infty.$$

Nous en déduisons qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad TV_{[a,b]}(\beta) \leq C \left(\frac{1}{t} + 1 \right).$$

D'après le lemme (2) pour $\omega_n = u_n$ et $\gamma_n = \rho_n$ ou $\rho_n(u_n + \bar{p}_n)$, nous avons que : $\rho_n u_n \rightharpoonup \rho u$ et $\rho_n(u_n + \bar{p}_n) u_n \rightharpoonup qu$ dans $L_{\omega^*}^\infty([0, T[\times \mathbb{R})$. D'autre part, d'après la propriété (II.21c) nous pouvons appliquer le lemme (2) à la suite $(\rho_n \bar{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'où : $\rho_n \bar{p}_n \rightharpoonup \rho \bar{p}$ dans $L_{\omega^*}^\infty([0, T[\times \mathbb{R})$. Ainsi, on obtient une solution de (I.5). Les autres convergences se montrent aussi facilement. ■

Théorème : II.2 *Soit $\rho^0 \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $0 \leq \rho^0 \leq \rho^*$ et $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors, il existe un triplet (n, u, \bar{p}) avec les régularités (II.20) qui vérifie le système (I.5). De plus, les solutions vérifient les propriétés (II.21a), (II.21b), (II.21d) et, pour toute fonction $S \in C^1(\mathbb{R})$ nous avons*

$$\partial_t (\rho S(u) + \rho \bar{p}^S) + \partial_x (\rho u S(u) + \rho u \bar{p}^S) = 0 \quad (\text{II.23})$$

sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ avec $\bar{p}^S \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$ et vérifiant $|\bar{p}^S| \leq \|S'\|_{L^\infty(\tilde{K})} |\bar{p}|$ où $\tilde{K} = [\text{essinf}_y u^0, \text{essup}_y u^0]$.

Preuve : Pour démontrer ce théorème, on combine le lemme d'existence pour les bouchons collants, le lemme d'approximation et le résultat de compacité de la manière suivante. D'après le lemme 1 il existe deux suites $(\rho_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers ρ^0 et u^0 . À l'aide de la partie (II.A), on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un triplet (ρ_n, u_n, \bar{p}_n) qui vérifie le système (I.5c) et ayant pour régularité (II.20). De plus ρ_n, u_n et \bar{p}_n vérifient les propriétés (II.21a), (II.21b), et (II.21d).

En appliquant la propriété (II.1) à cette suite, on en déduit l'existence d'un triplet (ρ, u, \bar{p}) ayant pour régularité (II.20) et solution de (I.5) pour les conditions initiales ρ^0 et u^0 . Les solutions obtenues satisfont entre autre les propriétés (II.21a), (II.21b), (II.21d). Par conséquent, il ne reste plus qu'à prouver qu'elles vérifient (II.23).

D'après la remarque de la partie (II.A) (en particulier (II.12)), on peut appliquer le lemme 2 avec $\omega_n = \rho_n \bar{p}_n^S$ d'où $\rho_n \bar{p}_n^S \rightharpoonup \rho \bar{p}^S$. D'autre part, d'après la relation (II.11), nous avons pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$(\rho_n S(u_n) + \rho_n \bar{p}_n^S)(t, x) - (\rho_n S(u_n) + \rho_n \bar{p}_n^S)(0, x) = \int_0^t \partial_x (\rho_n u_n S(u_n) + \rho_n u_n \bar{p}_n^S)(\xi, x) d\xi. \quad (\text{II.24})$$

Soit K un compact tel que $\text{supp}(\varphi) \subset K$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} (\rho_n S(u_n) + \rho_n \bar{p}_n^S)(t, x) \varphi(x) dx \right| &\leq \int_K |(\rho_n S(u_n) + \rho_n \bar{p}_n^S)(0, x) \varphi(x)| dx \\ &\quad + \left| \int_K \int_0^t \partial_x (\rho_n u_n (S(u_n) + \bar{p}_n^S))(\xi, x) \varphi(x) d\xi dx \right| \\ &\leq \rho^* \left(\|S\|_{L^\infty(K)} + \|\bar{p}_n^S\|_\infty \right) \\ &\quad + \left| \int_K \int_0^t (\rho_n u_n (S(u_n) + \bar{p}_n^S))(\xi, x) \partial_x \varphi(x) d\xi dx \right| \\ &\leq \rho^* \left(\|S\|_{L^\infty(K)} + \|u_n^0\|_\infty \right) + \rho^* \|u_n^0\| \left(\|S\|_{L^\infty(K)} + \|u_n^0\|_\infty \right) M_\varphi \end{aligned}$$

où M_φ est une constante qui ne dépend que de φ . La suite $(u_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée par hypothèse on en déduit que $(\rho_n S(u_n) + \rho_n \bar{p}_n^S)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $C_t([0, T]; \mathcal{D}'_x)$ et donc quitte à extraire une sous-suite il existe q^S tel que $\rho_n S(u_n) + \rho_n \bar{p}_n^S \rightharpoonup q^S$ dans $C_t([0, T]; L_{\omega^*}^\infty(\mathbb{R}))$ pour toute fonction $S \in C^1(\mathbb{R})$. En appliquant à nouveau le lemme 2, nous avons

$$\rho_n (S(u_n) + \bar{p}_n^S) u_n \rightharpoonup q^S u \quad \text{dans } L_{\omega^*}^\infty([0, T[\times \mathbb{R}). \quad (\text{II.25})$$

Notons que dans (II.10), si S est monotone, Q^S est négative si S est croissante et positive si S est décroissante. Posons

$$\partial_t (\rho_n S(u_n)) + \partial_x (\rho_n u_n S(u_n)) = Q_n^S.$$

Étant donné que $(Q_n^S)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace des distributions c'est aussi une mesure bornée pour toute fonction S monotone et pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho_n S(u_n) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} \rho_n S(u_n) u_n \varphi'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} Q_n^S dx.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} \rho_n S(u_n) u_n \varphi'(x) dx$ est aussi bornée, on en déduit donc que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \rho_n S(u_n) \varphi(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est uniformément bornée dans } BV_t \quad (\text{II.26})$$

pour toute fonction S . D'autre part, toute fonction $S \in C^1(\mathbb{R})$ est la somme de deux fonctions monotones. Aussi, (II.26) reste vraie pour toute fonction $S \in C^1(\mathbb{R})$. Il reste donc à prouver que $(\rho_n S(u_n)) \rightharpoonup \rho S(u)$ dans $L_{\omega^*}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$. Étant donné que S est continue et que le support de φ est compact, S peut être approchée uniformément par une suite de polynôme sur le support de φ donc il suffit de montrer que $\rho_n u_n^\ell \rightharpoonup \rho u^\ell$ dans $L_{\omega^*}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Montrons le par récurrence sur ℓ . D'après ce qui précède, $u_n \rightharpoonup u$ dans $L_{\omega^*}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$. Supposons maintenant qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\rho_n u_n^\ell \rightharpoonup \rho u^\ell, \quad \text{dans } L_{\omega^*}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}).$$

Par (II.26), la suite $(\int_{\mathbb{R}} \rho_n S(u_n) \varphi(x) dx)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans BV_t donc compact dans $L_t^1(]0, T[)$, Donc par unicité de la limite elle converge vers $\int_{\mathbb{R}} \rho S(u) \varphi(x) dx$. On peut donc appliquer le lemme (2) avec $\gamma_n = \rho_n u_n^\ell$ et $\omega_n = u_n$ et nous obtenons

$$\rho_n u_n^{\ell+1} \rightharpoonup \rho u^{\ell+1}, \quad \text{dans } L_{\omega^*}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}).$$

Par conséquent, nous avons, pour tout $S \in C^1(\mathbb{R})$

$$\rho_n S(u_n) \rightharpoonup \rho S(u), \quad \text{dans } L_{\omega^*}^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$$

et par unicité de la limite au sens des distributions, on en déduit que $q^S = \rho S(u) + \rho \bar{p}^S$ pour toute fonction $S \in C^1(\mathbb{R})$. ■

III) Étude du modèle multi-voies

III.A) Solutions de type bouchons collants pour le modèle multi-voies

Dans le modèle à une voie, nous avons présenté une manière de construire des solutions de type bouchons collants. Pour le modèle multi-voies, nous allons montrer l'existence de solutions particulières. Plusieurs cas sont à traiter. Néanmoins, étant donné les similarités de ceux-ci avec le modèle à une voie, on se contente ici d'exposer les résultats dans le cadre d'un rétrécissement de la voie sans collision. On définit les quantités suivantes :

$$\rho(t, x) = \rho^*(x) \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)} \quad (\text{III.1a})$$

$$\rho(t, x) u(t, x) = \rho^*(x) \sum_{i=1}^N u_i \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)} \quad \rho(t, x) p(t, x) = \rho^*(x) \sum_{i=1}^N p_i \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)}. \quad (\text{III.1b})$$

Pour simplifier les calculs, nous considérerons dans la suite que la densité ρ^* passe de 2 à 1 au point x^* , la première voiture atteignant le rétrécissement au temps t^* et la dernière voiture au temps t^{**} . La vitesse sera alors divisée par α et on peut représenter la dynamique de la manière suivante :

On définit localement la densité $\rho(t, x)$, le flux, $\rho(t, x) u(t, x)$ et la pression $p(t, x)$ tels que :

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)} & \text{si, } t < t^* \\ \mathbb{1}_{a_{int}(t) < x < x^*} + 2\mathbb{1}_{x^* < x < \bar{b}_{int}(t)} & \text{si, } t^* < t < t^{**} \\ 2\mathbb{1}_{\bar{a}_i(t) < x < \bar{b}_i(t)} & \text{si, } t > t^* \end{cases} \quad (\text{III.2a})$$

$$\rho(t, x) u(t, x) = \begin{cases} u_i \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)} & \text{si, } t < t^* \\ u_{int} \mathbb{1}_{a_{int}(t) < x < x^*} + 2\bar{u}_{int} \mathbb{1}_{x^* < x < \bar{b}_{int}(t)} & \text{si, } t^* < t < t^{**} \\ 2\bar{u}_i \mathbb{1}_{\bar{a}_i(t) < x < \bar{b}_i(t)} & \text{si, } t > t^* \end{cases} \quad (\text{III.2b})$$

$$\rho(t, x) p(t, x) = \begin{cases} p_i \mathbb{1}_{a_i(t) < x < b_i(t)} & \text{si, } t < t^* \\ p_{int} \mathbb{1}_{a_{int}(t) < x < x^*} + 2\bar{p}_{int} \mathbb{1}_{x^* < x < \bar{b}_{int}(t)} & \text{si, } t^* < t < t^{**} \\ 2\bar{p}_i \mathbb{1}_{\bar{a}_i(t) < x < \bar{b}_i(t)} & \text{si, } t > t^* \end{cases} \quad (\text{III.2c})$$

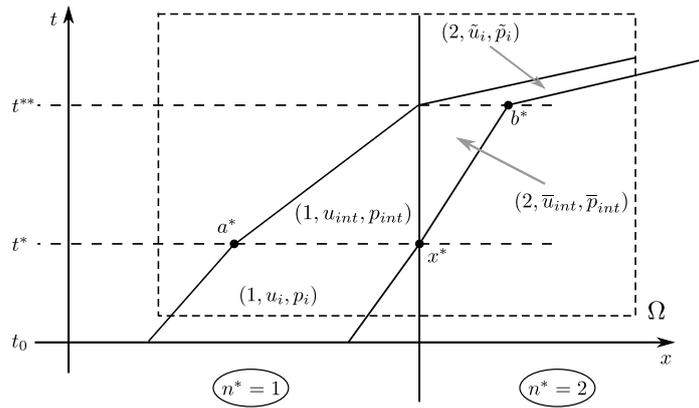


FIGURE 2 – Schéma de la dynamique lors du passage d'un bloc de une à deux voies

avec :

$$\frac{d}{dt}a_i(t) = \frac{d}{dt}b_i(t) = u_i, \quad a_i(t^*) = a^*, \quad b_i(t^*) = x^* \quad (\text{III.3a})$$

$$\frac{d}{dt}a_{int}(t) = u_{int}, \quad a_{int}(t^*) = a^*, \quad a_{int}(t^{**}) = x^*, \quad (\text{III.3b})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{b}_{int}(t) = \bar{u}_{int}, \quad \bar{b}_{int}(t^*) = x^*, \quad \bar{b}_{int}(t^{**}) = b^*, \quad (\text{III.3c})$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{a}_i(t) = \frac{d}{dt}\tilde{b}_i(t) = \tilde{u}_i, \quad \tilde{a}_i(t^{**}) = x^*, \quad \tilde{b}_i(t^{**}) = b^* \quad (\text{III.3d})$$

Cette configuration est illustrée à la figure 2.

Lemme : 4 *La dynamique décrite par les équations (III.2) et (III.3) vérifie le système (I.7) si et seulement si,*

$$p_{int} = u_i + p_i - u_{int}, \quad (\bar{u}_{int}, \bar{p}_{int}) = \left(\frac{u_{int}}{2}, \alpha(u_i + p_i) - \frac{u_{int}}{2} \right) \quad \tilde{p}_i = \alpha(u_i + p_i) - \tilde{u}_i \quad (\text{III.4})$$

avec les conditions : $0 \leq u_{int} \leq u_i + p_i$ et, $0 \leq \tilde{u}_i \leq \alpha(u_i + p_i)$.

Pour les cas listés ci-dessous, on a un lemme analogue :

- a) Collision de deux blocs sans changement du nombre de voies.
- b) Diminution du nombre de voies sans collision.

Étant donné que les trois comportements décrits ci-dessus ne sont pas instantanés il peut y avoir des interactions entre eux. On a donc, en plus, les cas ci-dessous qui, ne sont pas de simples superpositions des cas précédents. Pour simplifier la présentation, on se contentera ici de les énumérer.

- a) Un groupe de deux blocs entrent dans un rétrécissement.
- b) Collision de deux blocs juste avant un rétrécissement.
- c) Un groupe de blocs entrent dans une zone où le nombre de voies augmente.
- d) Deux blocs entrant en collision après une augmentation du nombre de voies.
- e) Passage de $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ voies sans que la dynamique à deux voies n'ait eu le temps de s'installer.
- f) Passage de $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ voies sans que la dynamique à une voie n'ait eu le temps de s'installer.

Remarque : 1 On suppose que la vitesse u est prolongée linéairement entre deux blocs dans les zones de densité nulle et on fera l'hypothèse qu'elle est constante à l'infini. En ce qui concerne la pression, la contrainte $(\rho^* - \rho)p = 0$ impose $p = 0$ dans les zones de densité nulle et à l'infini. Ainsi, les calculs de la variation totale de la pression et de la vitesse en x sont modifiés.

Théorème : III.1 *Avec les dynamiques décrites ci-dessus, les quantités $\rho(t, x)$, $u(t, x)$ et $p(t, x)$ définies par les équations (III.1) et la remarque (1) ci-dessus sont solutions du système (I.7).*

Propriété : III.1 *On considère les quantités $\rho(t, x)$, $u(t, x)$ et $p(t, x)$ définies par les équations (III.1) et la remarque (1) ci dessus. Ces fonctions satisfont le principe du maximum :*

$$0 \leq u(t, x) \leq 2\alpha \left(\operatorname{esssup}_y u^0(y) + \operatorname{esssup}_y p^0(y) \right) \quad (\text{III.5a})$$

$$0 \leq p(t, x) \leq 2\alpha \left(\operatorname{esssup}_y u^0(y) + \operatorname{esssup}_y p^0(y) \right). \quad (\text{III.5b})$$

Si, de plus, on suppose que les données initiales dans les blocs $(u_i^0)_{1 \leq i \leq N}$ et $(p_i^0)_{1 \leq i \leq N}$ sont à variations bornées alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a pour tout compact $K = [a, b]$

$$TV_K(u(t, \cdot)) \leq 4\alpha M \left(TV_{\tilde{K}}(u^0) + TV_{\tilde{K}}(p^0) + \|u^0\|_{L^\infty} \right) \quad (\text{III.6a})$$

$$TV_K(p(t, \cdot)) \leq 4\alpha M \left(TV_{\tilde{K}}(u^0) + TV_{\tilde{K}}(p^0) + \|u^0\|_{L^\infty} \right) \quad (\text{III.6b})$$

avec $\tilde{K} = [a - t(\operatorname{esssup}_y u^0), b - t(\operatorname{esssup}_y u^0)]$ et M le nombre de changements de nombres de voies supposé fini.

L'estimation (III.5a) reflète le fait que les voiture peuvent accélérer dans ce modèle. On notera, de plus, que dans le modèle précédent on avait seulement l'estimation (II.21b).

Preuve : (de la propriété (III.1)) Pour des raisons de concision, nous ne traiterons ici que le cas critique du passage d'une à deux voies sans collisions, les autres cas critiques se traitent de manière analogue, notamment le cas de collisions sans changement du nombre de voies et le cas de la diminution du nombre de voies sans collisions. D'autre part, pour simplifier la présentation, on calculera la variation totale sur \mathbb{R} de u et p .

Au temps $t = 0$, on considère la dynamique suivante : soit deux blocs $B_1 = (u_1^0, p_1^0)$ et $B_2 = (u_2^0, p_2^0)$ sur une section de route où $\rho^* = 1$ on a donc

$$TV_{\mathbb{R}}(u^0) = |u_2^0 - u_1^0| \quad \text{et} \quad TV_{\mathbb{R}}(p^0) = 2(p_2^0 + p_1^0).$$

Au temps $t_1 > 0$, le bloc B_1 entre sur la zone à deux voies et ce changement de dynamique a lieu dans l'intervalle $[t_1, t_2]$. Puis dans l'intervalle de temps $[t_3, t_4]$ avec $t_3 > t_2$ le bloc B_2 entre dans la zone à deux voies. Dans la suite, on reprend les notations du lemme (4).

- Pour $t \in]t_1, t_2[$, nous avons que :

$$u(t, x) = u_2^0 \mathbb{1}_{]-\infty, a_2^* - u_2^0(t_3 - t)[} + f_1(x) \mathbb{1}_{]a_2^* - u_2^0(t_3 - t), a_1^*[} + u_{1,int} \mathbb{1}_{]a_1^*, x^*[} + \bar{u}_{1,int} \mathbb{1}_{]x^*, +\infty[}$$

où f_1 est la fonction affine qui relie la zone à vitesse u_2^0 à la zone à vitesse $u_{1,int}$. Donc,

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) &= |u_2^0 - u_{1,int}| + |u_{1,int} - \bar{u}_{1,int}| \\ &= |u_2^0 - u_{1,int}| + \frac{u_{1,int}}{2} \\ &\leq |u_2^0 - u_1^0| + |u_1^0 - u_{1,int}| + \frac{u_{1,int}}{2}. \end{aligned}$$

Soit $u_1^0 - u_{1,int} \geq 0$ et, dans ce cas, nous avons

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) \leq TV_{\mathbb{R}}(u^0) + u_1^0 - \frac{u_{1,int}}{2} \leq TV_{\mathbb{R}}(u^0) + \|u_1^0\|_{\infty}.$$

Soit $u_1^0 - u_{1,int} < 0$ et, dans ce cas, comme $u_{1,int} \leq u_1^0 + p_1^0$, nous avons

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) \leq TV_{\mathbb{R}}(u^0) + \frac{3}{2}u_{1,int} - u_1^0 \leq TV_{\mathbb{R}}(u^0) + 2u_{1,int} \leq TV_{\mathbb{R}}(u^0) + 2\|u^0\| + TV_{\mathbb{R}}(p^0).$$

Nous en déduisons donc que

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) \leq TV_{\mathbb{R}}(u^0) + 2\|u^0\|_{\infty} + TV_{\mathbb{R}}(p^0).$$

D'autre part, la pression a pour expression

$$p(t, x) = p_2^0 \mathbb{1}_{]a_2(t), b_2(t)} + p_{1,int} \mathbb{1}_{]a_1^*, x^*[} + \bar{p}_{1,int} \mathbb{1}_{]x^*, b_1^*[}$$

avec $a_2(t) < b_2(t) < a_1^*$. Par le lemme (4) on sait que

$$\bar{p}_{1,int} - p_{1,int} = \alpha(u_1^0 + p_1^0) - \frac{u_{1,int}}{2} - u_1^0 - p_1^0 + u_{1,int} = (\alpha - 1)(u_1^0 + p_1^0) + \frac{u_{1,int}}{2} \geq 0 \quad (\text{III.7})$$

car $\alpha \geq 1$. Donc

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}(p(t, x)) &= 2p_2^0 + p_{1,int} + |p_{1,int} - \bar{p}_{1,int}| + \bar{p}_{1,int} \\ &= 2(p_2^0 + \bar{p}_{1,int}) \\ &= 2\left(p_2^0 + \alpha(u_1^0 + p_1^0) - \frac{u_{1,int}}{2}\right) \\ &\leq 2\alpha(p_2^0 + u_1^0 + p_1^0) \\ &\leq \alpha TV_{\mathbb{R}}(p) + 2\alpha \|u^0\|_{\infty}. \end{aligned}$$

• Pour $t \in]t_2, t_3[$, le bloc B_1 reste sur une portion de route à deux voies et le bloc B_2 est encore dans une zone à une voie, donc

$$u(t, x) = u_2^0 \mathbb{1}_{]-\infty, a_2^* - u_2^0(t_3 - t)[} + f_2(x) \mathbb{1}_{]a_2^* - u_2^0(t_3 - t), b_1^*[} + \tilde{u}_1 \mathbb{1}_{]b_1^*, +\infty[}$$

avec f_2 une fonction affine qui relie les deux blocs. Par conséquent,

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) = |u_2^0 - \tilde{u}_1|.$$

Dans le cas où $u_2^0 - \tilde{u}_1 \geq 0$ nous avons $TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) \leq TV_{\mathbb{R}}(u^0)$, et dans le cas où $u_2^0 - \tilde{u}_1 < 0$, nous obtenons

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) \leq \alpha(u_1^0 + p_1^0) \leq \alpha \|u^0\| + \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0).$$

Donc, de manière générale, pour $t \in]t_2, t_3[$, nous avons

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) \leq \alpha \|u^0\| + \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0) + TV_{\mathbb{R}}(u^0).$$

Pour la pression, nous avons

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}(p(t, \cdot)) &= TV_{\mathbb{R}}\left(p_2^0 \mathbb{1}_{]-\infty, a_2^* - u_2^0(t_3 - t)[} + \tilde{p}_1 \mathbb{1}_{]b_1^*, +\infty[}\right) \\ &= 2p_2^0 + 2\alpha p_1^0 + 2\alpha u_1^0 \quad \text{car } \tilde{p}_1 = \alpha(p_1^0 + u_1^0) - \tilde{u}_1 \\ &\leq \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0) + 2\alpha \|u^0\|_{\infty} \end{aligned}$$

• Pour $t \in]t_3, t_4[$, le bloc B_2 entre dans la zone à deux voies et B_1 continue sur une portion à deux voies, d'où :

$$u(t, x) = u_{2,int} \mathbb{1}_{]-\infty, x^*[} + \bar{u}_{2,int} \mathbb{1}_{]x^*, b_2^*[} + f_3(x) \mathbb{1}_{]b_2^*, \tilde{a}_1(t)[} + \tilde{u}_1 \mathbb{1}_{] \tilde{a}_1(t), +\infty[}$$

avec f_3 est la fonction affine qui relie la zone à vitesse $\bar{u}_{2,int}$ à la zone à vitesse \tilde{u}_1 et, $\tilde{a}_1(t) > b_2^*$ pour $t > t_3$. Par conséquent,

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) = |u_{2,int} - \bar{u}_{2,int}| + |\bar{u}_{2,int} - \tilde{u}_1^0|.$$

Il y a encore deux cas à traiter soit $\bar{u}_{2,int} - \tilde{u}_1^0 \geq 0$ et, dans ce cas,

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) \leq |u_{2,int} - \bar{u}_{2,int}| + \bar{u}_{2,int} \leq \frac{3}{2} u_{2,int} \leq 2u_2^0 + 2p_2^0 \leq TV_{\mathbb{R}}(p^0) + 2 \|u^0\|_{\infty};$$

soit $\bar{u}_{2,int} - \tilde{u}_1^0 < 0$ et nous avons alors

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) = \frac{1}{2} u_{2,int} + \tilde{u}_1^0 - \bar{u}_{2,int} = \tilde{u}_1^0 \leq \alpha (TV_{\mathbb{R}}(p^0) + \|u^0\|_{\infty}).$$

Ainsi, pour $t \in]t_3, t_4[$,

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) \leq \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0) + 2\alpha \|u^0\|_{\infty}.$$

Pour la pression, nous avons

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}(p(t, \cdot)) &= TV_{\mathbb{R}}(p_{2,int} \mathbb{1}_{]a_2^*, x^*[} + \bar{p}_{2,int} \mathbb{1}_{]x^*, b_2^*[} + \tilde{p}_1 \mathbb{1}_{] \tilde{a}_1(t), +\infty[}) \\ &= p_{2,int} + |p_{2,int} - \bar{p}_{2,int}| + \bar{p}_{2,int} + 2\tilde{p}_1. \end{aligned}$$

De même que pour (III.7) on a

$$\bar{p}_{2,int} - p_{2,int} = (\alpha - 1) (u_2^0 + p_2^0) + \frac{u_{2,int}}{2} \geq 0$$

d'où

$$TV_{\mathbb{R}}(p(t, \cdot)) = 2\bar{p}_{2,int} + 2\tilde{p}_1 \leq \alpha (u_2^0 + p_2^0) + \alpha (u_1^0 + p_1^0) \leq 2\alpha \|u^0\|_{\infty} + \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0).$$

- Pour $t > t_4$, les deux blocs se déplacent sur une portion de route à deux voies donc

$$u(t, x) = \tilde{u}_1 \mathbb{1}_{\tilde{a}_1(t) < x < +\infty} + f_4(x) \mathbb{1}_{\tilde{b}_2(t) < x < \tilde{a}_1(t)} + \tilde{u}_2 \mathbb{1}_{-\infty < x < \tilde{b}_2(t)}.$$

Ainsi, dans le cas où $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \geq 0$, il vient

$$TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \leq \tilde{u}_1 \leq \alpha (u_1^0 + p_1^0) \leq \alpha (TV_{\mathbb{R}}(p^0) + \|u^0\|_{\infty}).$$

Par symétrie, cette inégalité reste vraie dans le cas où $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 < 0$. Pour la pression on a

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}(p(t, \cdot)) &= TV_{\mathbb{R}}\left(\tilde{p}_1 \mathbb{1}_{\tilde{a}_1(t) < x < \tilde{b}_1(t)} + \tilde{p}_2 \mathbb{1}_{\tilde{a}_2(t) < x < \tilde{b}_2(t)}\right) \\ &= 2\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 \\ &\leq 2\alpha (u_1^0 + p_1^0 + u_2^0 + p_2^0) \\ &\leq \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0) + 4\alpha \|u^0\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Finalement, dans le cas du passage de une à deux voies, on a :

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) &\leq TV_{\mathbb{R}}(u^0) + 2\alpha \|u^0\| + \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0) \\ TV_{\mathbb{R}}(p(t, \cdot)) &\leq \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0) + 4\alpha \|u^0\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Toutefois, il est possible que plusieurs blocs entrent en même temps dans une zone où le nombre de voies augmente. C'est pourquoi, dans le cadre du passage d'une à deux voies sans collision, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}(u(t, \cdot)) &\leq TV_{\mathbb{R}}(u^0) + \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0) + 2M\alpha \|u^0\| \\ TV_{\mathbb{R}}(p(t, \cdot)) &\leq \alpha TV_{\mathbb{R}}(p^0) + 4M\alpha \|u^0\|_{\infty} \end{aligned}$$

où M est le nombre de changement du nombre de voies.

Les autres cas particuliers sont :

- Une diminution du nombre de voies de circulations sans collisions.
- Une collision sans changement du nombre de voies de circulation.

Le cas général est une superposition de ces différents cas et donne les estimations (III.6). ■

III.B) Variantes pour les lemmes d'approximations et de compacité :

Lemme : 5 Soit $\rho^0 \in L^1(\mathbb{R})$ et $u^0, p^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap VB(\mathbb{R})$ tels que $0 \leq \rho \leq \rho^*$, $0 \leq u^0$, $0 \leq p^0$ et $(\rho^* - \rho^0)p^0 = 0$. Alors, il existe une suite de blocs de données initiales $(\rho_k^0, u_k^0, p_k^0)_{k \geq 0}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_k^0(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \rho^0(x) dx, \quad (III.8)$$

$$\text{essinf}_y u^0(y) \leq u_k^0 \leq \text{esssup}_y u^0(y), \quad \text{essinf}_y p^0(y) \leq p_k^0 \leq \text{esssup}_y p^0(y), \quad (III.9)$$

$$TV(u_k^0) \leq TV(u^0), \quad TV(p_k^0) \leq TV(p^0) \quad (III.10)$$

et telle que $\rho_k^0 \rightharpoonup \rho^0$, $\rho_k^0 u_k^0 \rightharpoonup \rho^0 u^0$ et $\rho_k^0 p_k^0 \rightharpoonup \rho^0 p^0$ au sens des distributions. Qui plus est, la suite $(\rho_k^0, u_k^0, p_k^0)_{k \geq 0}$ vérifie aussi la contrainte :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (\rho^*(x) - \rho_k^0) p_k^0 = 0. \quad (III.11)$$

Preuve : (Idées générales) Ce lemme est fortement inspiré du lemme 1 et on se contente ici de mettre en relief les principales différences avec le lemme précédemment cité.

À un ensemble négligeable près, on peut écrire $\mathbb{R} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} I_j$ avec $I_j =]a_j, a_{j+1}[$ un intervalle borné tel que, sur celui-ci, $\rho^*(x) = n_j^* \in \{1, 2\}$. Toujours à un ensemble négligeable près, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut découper l'intervalle I_j sous la forme :

$$I_j = \bigsqcup_{i=0}^{k-1}]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[, \quad a_{j,i}^{(k)} = a_j + \frac{i}{k}(a_{j+1} - a_j), \quad i \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Pour $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}^*$ et, $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, on pose $m_{j,i}^{(k)} = \frac{1}{n_j^*} \int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x) dx$. Comme $0 \leq \rho^0 \leq \rho^*$, on a $0 \leq m_{j,i}^{(k)} \leq \frac{mes(I_j)}{k}$ et donc $]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[+ m_{j,i}^{(k)}[C]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[$ et on pose :

$$\rho_k^0(x) = \sum_{j=-k}^k \sum_{i=0}^{k-1} \rho_j^* \mathbb{1}_{]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[+ m_{j,i}^{(k)}[}(x)$$

$$\rho_k^0(x) u_k^0(x) = \sum_{j=-k}^k \sum_{i=0}^{k-1} \rho_j^* u_{j,i}^{(k)} \mathbb{1}_{]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[+ m_{j,i}^{(k)}[}(x), \quad \rho_k^0(x) p_k^0(x) = \sum_{j=-k}^k \sum_{i=0}^{k-1} \rho_j^* p_{j,i}^{(k)} \mathbb{1}_{]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[+ m_{j,i}^{(k)}[}(x).$$

Comme dans le lemme 1, on montre ensuite la convergence des suites définies ci-dessus vers $\rho^0, \rho^0 u^0$ et $\rho^0 p^0$. Pour finir, montrons que $TV(u_k^0) \leq TV(u^0)$:

$$TV(u_k^0) = \sum_{j=-k}^k \sum_{i=0}^{k-1} |u_{j,i+1}^{(k)} - u_{j,i}^{(k)}| + \sum_{j=-k}^k |u_{j,k}^{(k)} - u_{j+1,0}^{(k)}| \leq TV_{]a_{-k}, a_{k+1}[}(u^0)$$

De même, on peut montrer que $TV(p_k^0) \leq TV(p^0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. ■

III.C) Existence de solutions faibles au problème (I.7)

On procède comme dans le cas du modèle à une voie. Dans un premier temps, on approche les données initiales (au sens des distributions) par des bouchons collants, lesquels nous donnent une suite de solutions. Puis grâce aux lemmes de compacité, on montre que ces suites convergent et qu'elles vérifient le système (I.7) en ayant comme régularité :

$$\rho_n \in L_t^\infty(]0, \infty[, L_x^\infty(\mathbb{R}) \cap L_x^1(\mathbb{R})) \quad (\text{III.12a})$$

$$u_n, \bar{p}_n \in L_t^\infty(]0, \infty[, L_x^\infty(\mathbb{R})). \quad (\text{III.12b})$$

Théorème : III.2 Soit (ρ^0, u^0, p^0) des données initiales telles que :

$$\rho^0 \in L^1(\mathbb{R}), \quad u^0, p^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$$

avec $0 \leq u^0, 0 \leq p^0, 0 \leq \rho^0 \leq \rho^*$ et $(\rho^*(x) - \rho^0(x)) p^0(x) = 0$. Alors, il existe (ρ, u, p) avec les régularités (III.12) solution du système (I.7) et ayant pour conditions initiales (ρ^0, u^0, p^0) . De plus, les solutions obtenues satisfont les inégalités suivantes :

$$0 \leq u(t, x) \leq 2\alpha (\text{essup}_y u^0(y) + \text{essup}_y p^0(y)) \quad (\text{III.13a})$$

$$0 \leq p(t, x) \leq 2\alpha (\text{essup}_y u^0(y) + \text{essup}_y p^0(y)). \quad (\text{III.13b})$$

Lemme : 6 Soit $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_x(\mathbb{R})$, la suite $(\int_{\mathbb{R}} \rho_k(t, x) \varphi(x) dx)_{k \in \mathbb{N}}$ soit uniformément lipschitzienne continue sur $[0, T]$, c'est-à-dire :

$$\exists C_\varphi > 0 \ / \ \forall k \in \mathbb{N}, \forall s, t \in [0, T], \quad \left| \int_{\mathbb{R}} (\rho_k(t, x) - \rho_k(s, x)) \varphi(x) dx \right| \leq C_\varphi \cdot |t - s|$$

Alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe $\rho \in L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ telle que $\rho_n \rightharpoonup \rho$ dans $C([0, T], L_{\omega^*}^\infty(\mathbb{R}_x))$ c'est-à-dire :

$$\forall \Gamma \in L^1(\mathbb{R}_x), \quad \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_{\mathbb{R}} (\rho_n(t, x) - \rho_n(s, x)) \Gamma(x) dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque : $L^1(\mathbb{R})$ est séparable donc il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (à support compact) dénombrable dense (cf [5]). Soit $(\zeta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite régularisante, alors la suite de fonctions $(\psi_{p,q})$ définie par $\psi_{p,q} = f_p * \zeta^q$ est une suite de fonctions C^∞ à support compact dans \mathbb{R} dénombrable (par dénombrabilité de \mathbb{N}^2) et dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

2. mesure de l'intervalle.

Preuve : Soit $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite dénombrable, dense de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$. Pour tout $(k, m) \in \mathbb{N}^2$, on définit

$$g_{k,m}(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho_k(t, x) \varphi_m(x) dx.$$

Étant donnée que la suite $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$, il existe M tel que

$$\|g_{k,m}(t)\|_\infty \leq M \int_{\mathbb{R}} \varphi_m(x) dx.$$

Donc, à m fixé la suite, $(g_{k,m})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'autre part, étant donné que la suite $(\int_{\mathbb{R}} \rho_k(t, x) \varphi_m(x) dx)_{k \in \mathbb{N}}$ est uniformément lipschitzienne sur $[0, T]$, on a avec les notations de l'énoncé que

$$\forall (t, s) \in [0, T] \quad |t - s| \leq \frac{\varepsilon}{C_{\varphi_m}}, \quad |g_{k,m}(t) - g_{k,m}(s)| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite $(g_{k,m})_{k \in \mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue, bornée et $[0, T]$ est compact donc, par le théorème d'Ascoli, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $(g_{k,m})_{k \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $C([0, T], \mathbb{R})$.

En particulier, nous savons qu'il existe $\ell_0 \in C([0, T], \mathbb{R})$ et $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$g_{\sigma_0(k), 0} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell_0, \quad \text{dans } C([0, T], \mathbb{R}).$$

De même, la suite $(g_{\sigma_0(k), 1})_{k \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $C([0, T], \mathbb{R})$, donc il existe $\ell_1 \in C([0, T], \mathbb{R})$ et $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$g_{\sigma_0(\sigma_1(k)), 1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell_1, \quad \text{dans } C([0, T], \mathbb{R})$$

Ainsi, par récurrence, on montre qu'il existe une suite de fonctions $\sigma_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que :

$$g_{\sigma_0(\sigma_1(\dots \sigma_m(k) \dots)), m} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell_m, \quad \text{dans } C([0, T], \mathbb{R}).$$

On définit alors la fonction $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (extraction diagonale) et on a que

$$k \mapsto \sigma_0(\sigma_1(\dots \sigma_k(k) \dots))$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad g_{\sigma(k), m} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell_m, \quad \text{dans } C([0, T], \mathbb{R}). \quad (\text{III.14})$$

D'autre part, la suite $(\rho_{\sigma(k)})$ est bornée dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ donc, quitte à extraire une sous-suite elle converge faiblement dans $L_{\omega^*}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ vers ρ . Donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $\psi \in C_c^\infty([0, T])$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_{\sigma(k)}(t, x) \varphi_m(x) \psi(t) dx dt \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho(t, x) \varphi_m(x) \psi(t) dx dt,$$

ou, en d'autres termes,

$$\int_0^T g_{\sigma(k), m}(t) \psi(t) dt \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t, x) \varphi_m(x) dx \right) \psi(t) dt.$$

D'autre part, on déduit d'après (III.14) que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \int_0^T g_{\sigma(k), m}(t) \psi(t) dt \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int_0^T \ell_m(t) \psi(t) dt.$$

Donc par unicité de la limite, on en déduit que pour presque tout $t \in [0, T]$, $\ell_m(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho(t, x) \varphi_m(x) dx$. On en déduit alors que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{essup}_{t \in [0, T]} \left| \int_{\mathbb{R}} (\rho_{\sigma(k)}(t, x) - \rho(t, x)) \varphi_m(x) dx \right| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Pour finir, cette convergence reste vraie pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$ à cause de l'inégalité

$$\operatorname{essup}_{t \in [0, T]} \left| \int_{\mathbb{R}} (\rho_{\sigma(k)}(t, x) - \rho(t, x)) \varphi(x) dx \right| \leq \operatorname{essup}_{t \in [0, T]} \left| \int_{\mathbb{R}} (\rho_{\sigma(k)}(t, x) - \rho(t, x)) \varphi_m(x) dx \right| + 2M \|\varphi - \varphi_m\|_{L^1(\mathbb{R}_x)}$$

où $M = \sup \{\|\rho_k\|_\infty, \|\rho\|_\infty\} < +\infty$, car la suite $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$. Puis, on conclut par densité des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}_x)$ dans $L^1(\mathbb{R}_x)$. ■

Preuve : (du théorème (III.2)) D'après le lemme 5, il existe une suite de données initiales $(\rho_k^0, u_k^0, p_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions (III.8) à (III.11) et qui converge dans $L_{\omega^*}^{\infty}(\mathbb{R})$ vers (ρ^0, u^0, p^0) . D'après le théorème III.1, il existe donc une suite $(\rho_k, u_k, p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, (ρ_k, u_k, p_k) ait pour régularité (III.12), soit solution du système (I.7) et, vérifie les estimations (III.5) et (III.6).

Étant donné que pour tout $k \in \mathbb{N}$, ρ_k vérifie (I.7c), on en déduit que la suite $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée donc, quitte à extraire une sous-suite il existe $\rho \in L^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$ telle que : $\rho_k \rightharpoonup \rho$ dans $L_{\omega^*}^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$. D'autre part, grâce aux estimations sur les suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fournies par les inégalités (III.5) et (III.9), on en déduit que ces suites sont bornées dans $L^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$ et donc, à nouveau, quitte à extraire des sous-suites il existe $u, p \in L^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$ tel que $u_k \rightharpoonup u$ et $p_k \rightharpoonup p$ dans $L_{\omega^*}^{\infty}$.

On cherche maintenant à passer à la limite dans les équations aux dérivées partielles. Pour cela, on commence par montrer des convergences dans $C([0, T], L_{\omega^*}^{\infty}(\mathbb{R}_x))$ pour $T > 0$. En effet, par intégration de (I.7b), nous avons

$$\begin{aligned} \forall T >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x), \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \int_{\mathbb{R}} [\rho_k(u_k + p_k)(t, x) - \rho_k(u_k + p_k)(s, x)] I_{\alpha} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_s^t (\rho_k u_k (u_k + p_k) I_{\alpha}) \partial_x \varphi(x) d\tau dx \\ \left| \int_{\mathbb{R}} [\rho_k(u_k + p_k)(t, x) - \rho_k(u_k + p_k)(s, x)] I_{\alpha} \varphi(x) dx \right| \leq \rho^* 2C^2 |t - s| \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \varphi(x)| dx \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

où C est un majorant des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (existe car ces suites sont bornées dans $L^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$). La suite $(\rho_k(u_k + p_k) I_{\alpha})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée (car les suites $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont bornées) et par ce qui précède elle est uniformément lipschitzienne donc d'après le lemme 6 il existe $q \in L^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$ tel que

$$\rho_k(u_k + p_k) I_{\alpha} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} q, \quad \text{dans } C([0, T], L_{\omega^*}^{\infty}(\mathbb{R}_x)) \text{ pour tout } T > 0.$$

Par intégration de l'équation (I.7a), on obtient une estimation analogue à (III.15) et on obtient d'après le lemme (6) que

$$\rho_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} n, \quad \text{dans } C([0, T], L_{\omega^*}^{\infty}(\mathbb{R}_x)) \text{ pour tout } T > 0.$$

Afin de traiter le passage à la limite dans les produits, comme dans la dernière partie de la preuve du théorème II.1 on applique le lemme de compacité par compensation 2 (en remarquant que $C \leq C(\frac{1}{t} + 1)$) aux suites $(\gamma_k, \omega_k) = (\rho_k, u_k)$ ou (ρ_k, p_k) ou $(\rho_k(u_k + p_k) I_{\alpha}, u_k)$ et on obtient les convergences suivantes :

$$\rho_k u_k \rightharpoonup \rho u, \quad \text{dans } L_{\omega^*}^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R}) \quad (\text{III.16a})$$

$$\rho_k p_k \rightharpoonup \rho p, \quad \text{dans } L_{\omega^*}^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R}) \quad (\text{III.16b})$$

$$\rho_k(u_k + p_k) I_{\alpha} u_k \rightharpoonup q u, \quad \text{dans } L_{\omega^*}^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R}). \quad (\text{III.16c})$$

De ces convergences, nous en déduisons que $\rho_k(u_k + p_k) I_{\alpha} \rightharpoonup \rho(u + p) I_{\alpha}$ dans $L_{\omega^*}^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R})$ et donc que $q = \rho(u + p) I_{\alpha}$. D'où,

$$\rho_k(u_k + p_k) I_{\alpha} u_k \rightharpoonup \rho(u + p) I_{\alpha} u, \quad \text{dans } L_{\omega^*}^{\infty}([0, T[\times \mathbb{R}). \quad (\text{III.16d})$$

On en déduit donc que le triplet (ρ, u, p) est solution de (I.7), ce qui conclut la première partie de la preuve.

Il reste à démontrer que ρ^0, u^0 et p^0 sont bien les conditions initiales du problème. On montre facilement que pour tout $\varphi \in C_c^{\infty}([0, +\infty[\times \mathbb{R}_x)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\rho_k \partial_t \varphi + \rho_k u_k \partial_x \varphi)(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \rho_k^0(x) \varphi(0, x) dx = 0 \\ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} I_{\alpha} (\rho_k(u_k + p_k) \partial_t \varphi + \rho_k(u_k + p_k) u_k \partial_x \varphi)(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} (I_{\alpha} \rho_k^0 (u_k^0 + p_k^0))(x) \varphi(t, x) dx = 0, \end{aligned}$$

et comme on a les convergences $\rho_k^0 \rightharpoonup \rho^0$, $\rho_k^0 u_k^0 \rightharpoonup \rho^0 u^0$, et $\rho_k^0 p_k^0 \rightharpoonup \rho^0 p^0$ dans $L_{\omega^*}^{\infty}(\mathbb{R})$, et par les convergences (III.16), on en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\rho \partial_t \varphi + \rho u \partial_x \varphi)(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \rho^0(x) \varphi(0, x) dx = 0 \\ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} I_{\alpha} (\rho(u + p) \partial_t \varphi + \rho(u + p) u \partial_x \varphi)(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} (I_{\alpha} \rho^0 (u^0 + p^0))(x) \varphi(t, x) dx = 0. \end{aligned}$$

Donc (ρ, u, p) est solution (I.7) pour les conditions initiales ρ^0, u^0 et p^0 . ■

Résultat de compacité :

Le théorème qui suit est un résultat de compacité et la preuve de celui-ci est contenue dans celle du théorème (III.2).

Théorème : III.3 *Considérons une suite de solutions $(\rho_k, u_k, p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que ρ_k, u_k et p_k ont les régularités définies par (III.12) et vérifient le système (I.7) et les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad p.p. (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad 0 \leq u_k(t, x) \leq C_\alpha \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad p.p. (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad 0 \leq p_k(t, x) \leq C_\alpha \\ \forall K = [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad p.p. t \in]0, +\infty[, \quad TV_K(u_k(t, \cdot)) \leq C_{\alpha, M, K} \\ \forall K = [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad p.p. t \in]0, +\infty[, \quad TV_K(p_k(t, \cdot)) \leq C_{\alpha, M, K} \end{aligned}$$

où C_α (respectivement $C_{\alpha, M, K}$) est une constante positive qui dépend de α (respectivement α, M et K). Alors, quitte à extraire une sous-suite $(\rho_k, u_k, p_k) \rightarrow (\rho, u, p)$ dans $L_{\omega^*}^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R})$, où (ρ, u, p) est solution du système (I.7) et ρ et u satisfont aussi :

$$\begin{aligned} p.p. (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad 0 \leq u(t, x) \leq C_\alpha \\ p.p. (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad 0 \leq p(t, x) \leq C_\alpha \end{aligned}$$

IV) Étude des schémas numériques pour un système d'Euler avec congestion

Dans le but d'adapter le schéma numérique proposé dans [7], nous avons cherché à reproduire quelques-unes des simulations qui y sont faites et à les comparer avec certaines variantes.

IV.A) Présentation du problème et du schéma numérique

Le modèle

Dans cette partie, on considère le système d'ordre deux d'Euler suivant :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot q = 0 \tag{IV.1a}$$

$$\partial_t q + \nabla_x \cdot \left(\frac{q \otimes q}{\rho} \right) + \nabla_x p(\rho) = 0 \tag{IV.1b}$$

où ρ est la densité, p la pression qui est reliée à la densité par la formule (I.4) et q le moment défini par $q = \rho u$, avec u la vitesse. Dans ce modèle, la pression admet deux dynamiques très différentes. En effet, dans les régions où la densité se rapproche de la densité maximale ρ^* , la pression devient infinie et dans les régions à faible densité, la pression tend vers zéro. Dans le but de séparer les dynamiques de congestion des dynamiques de décongestion (zones où la densité se rapproche de zéro), on redéfinit $p(\rho)$ par $\varepsilon p(\rho)$ de telle sorte que dans les régions de faible densité $p(\rho) = O(\varepsilon)$. Ainsi, en notant ρ^ε et q^ε les inconnues, le système (IV.1) devient :

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \nabla_x \cdot q^\varepsilon = 0 \tag{IV.2a}$$

$$\partial_t q^\varepsilon + \nabla_x \cdot \left(\frac{q^\varepsilon \otimes q^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} \right) + \nabla_x (\varepsilon p(\rho^\varepsilon)) = 0. \tag{IV.2b}$$

La limite lorsque ε tend vers zéro de $\varepsilon p(\rho^\varepsilon)$ dépend de la limite de ρ^ε et en particulier, dans le cas où ρ^ε tend vers ρ^* , la limite $\bar{p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon p(\rho^\varepsilon)$ peut être non nulle. Toutefois, on supposera qu'elle est toujours finie. En prenant la limite formelle de (IV.2), on obtient le système suivant :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot q = 0 \tag{IV.3a}$$

$$\partial_t q + \nabla_x \cdot \left(\frac{q \otimes q}{\rho} \right) + \nabla_x \bar{p}(\rho) = 0. \tag{IV.3b}$$

avec les contraintes (I.7c).

Notons que le système (IV.3) est différent du système (I.5). D'autre part, étant donné que l'on ne connaît pas \bar{p} , on ne peut pas résoudre le système (IV.3). Aussi, on cherche à résoudre le système (IV.2) pour de petites valeurs de ε . Cependant, les difficultés liées à la pression qui tend vers l'infini lorsque ρ tend vers ρ^* et au fait que ε tend vers 0 sont les mêmes, d'où l'étude de ce schéma.

Semi-discrétisation en temps

Soit ρ^n et q^n les approximations respectives de la densité et du moment au temps $t^n = n\Delta t$, où Δt est le pas en temps. La première idée est de discrétiser en temps de la manière suivante :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot q^{n+1} = 0 \quad (\text{IV.4a})$$

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot \left(\frac{q^n \otimes q^n}{\rho^n} \right) + \nabla_x (\varepsilon p(\rho^{n+1})) = 0. \quad (\text{IV.4b})$$

Notons que l'un des objectifs est d'obtenir un schéma AP (*Asymptotique Preserving*), c'est-à-dire qui permet d'obtenir une solution dont le comportement coïncide avec le système limite lorsque ε tend vers zéro. Dans ce but, il est crucial de discrétiser en temps de manière implicite ρ et q . Néanmoins, les schémas totalement implicites sont généralement plus coûteux et produisent plus d'oscillations ; aussi, on découpe dans le schéma (IV.4) la pression en une partie explicite p_0 et une partie implicite p_1 . L'équation (IV.4b) s'écrit alors de la manière suivante :

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot \left(\frac{q^n \otimes q^n}{\rho^n} \right) + \nabla_x (\varepsilon p_0(\rho^n)) + \nabla_x (\varepsilon p_1(\rho^{n+1})) = 0. \quad (\text{IV.5})$$

Toutefois, l'introduction d'une partie explicite impose une condition de stabilité liant les pas de temps et d'espace appelée condition CFL. Ici, à ε fixé, la CFL est de la forme suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\sigma \Delta x}{\max_{\rho, q} \left\{ \left| \frac{q}{\rho} \right| + \sqrt{\varepsilon p'_0(\rho)} \right\}}. \quad (\text{IV.6})$$

Pour que cette condition puisse être vérifiée, notamment dans les cas de congestion, il faut que la quantité $\max \left\{ \left| \frac{q}{\rho} \right| + \sqrt{\varepsilon p'_0(\rho)} \right\}$ soit finie. Étant donnée que $p'(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \rho^*} +\infty$, définir p_0 de sorte que ses dérivées soient bornées pour ρ proche de ρ^* permet d'avoir une condition de stabilité non vide. Pour cela, on définit la partie explicite de la pression par

$$p_0(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}p(\rho) & \text{si } \rho \leq \rho^* - \delta \\ \frac{1}{2}(p(\rho^* - \delta) + p'(\rho^* - \delta)(\rho - \rho^* + \delta) + \frac{1}{2}p''(\rho^* - \delta)(\rho - \rho^* + \delta)^2) & \text{si } \rho > \rho^* - \delta \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

où $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\gamma+2}}$. Ainsi, p_0 et ses dérivées restent bornées lorsque ρ approche de ρ^* et lorsque ε tend vers zéro. A partir de la partie explicite, on définit la partie implicite par

$$p_1(\rho) = p(\rho) - p_0(\rho) \quad (\text{IV.8})$$

En injectant (IV.5) dans l'équation (IV.4a), on obtient l'équation implicite en ρ^{n+1} suivante :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot q^n - \Delta t \nabla_x^2 \cdot \left(\frac{q^n \otimes q^n}{\rho^n} \right) - \Delta t \Delta_x (\varepsilon p_1(\rho^{n+1})) - \Delta t \Delta_x (\varepsilon p_0(\rho^n)) = 0. \quad (\text{IV.9})$$

Ainsi, une fois ρ^{n+1} calculé comme solution d'un système non linéaire, on détermine facilement q^{n+1} à partir de (IV.4b).

Discrétisation en temps et en espace

Soit $(x_j)_{0 \leq j \leq J}$ une subdivision de $[0, 1]$ telle que $x_0 = 0$, $x_J = 1$ et $x_{j+1} - x_j = \Delta x$ pour tout $j \in \llbracket 0, J-1 \rrbracket$. On discrétise en espace les équations (IV.9) et (IV.4b) selon la méthode de Rusanov [8] et on obtient l'équation implicite suivante en p_1 :

$$\begin{aligned} \rho \left((p_1)_j^{n+1} \right) - \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} \right)^2 \varepsilon \left[(p_1)_{j+2}^{n+1} - 2(p_1)_j^{n+1} + (p_1)_{j-2}^{n+1} \right] &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{j+1}^n - q_{j-1}^n) \\ + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(C_{j+\frac{1}{2}}^n (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) - C_{j-\frac{1}{2}}^n (\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) \right) &+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \left(F_{j+\frac{3}{2}}^n - F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n + F_{j-\frac{3}{2}}^n \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

où $F_{j+\frac{1}{2}}^n$ et $C_{j+\frac{1}{2}}^n$ sont respectivement le flux centré explicite, et le coefficient de diffusion local définis par

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[\frac{(q_j^n)^2}{\rho_j^n} + \frac{(q_{j+1}^n)^2}{\rho_{j+1}^n} + \varepsilon p_0(\rho_{j+1}^n) + \varepsilon p_0(\rho_j^n) \right] - \frac{1}{2} C_{j+\frac{1}{2}}^n (q_{j+1}^n - q_j^n) \quad (\text{IV.11a})$$

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n = \max \left\{ \left| \frac{q_j^n}{\rho_j^n} \right| + \sqrt{\varepsilon p'_0(\rho_j^n)}, \left| \frac{q_{j+1}^n}{\rho_{j+1}^n} \right| + \sqrt{\varepsilon p'_0(\rho_{j+1}^n)} \right\}. \quad (\text{IV.11b})$$

Une fois $(p_1^{n+1})_{0 \leq j \leq J}$ déterminée, on détermine à l'aide de la méthode de Newton $(\rho^{n+1})_{0 \leq j \leq J}$, puis on en déduit $(q_j^{n+1})_{0 \leq j \leq J}$ à l'aide de la formule suivante :

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \varepsilon (p_1(\rho_{j+1}^{n+1}) - p_1(\rho_{j-1}^{n+1})). \quad (\text{IV.12})$$

Pour déterminer p_1^{n+1} à partir de p_1^n et q^n , on doit dans un premier temps déterminer ρ^n à l'aide d'une méthode de Newton scalaire puis résoudre le système (IV.10) à l'aide d'une méthode de Newton vectorielle. Notons que la Jacobienne du système peut être calculée explicitement et qu'elle est tridiagonale symétrique.

IV.B) Schéma semi-implicite en pression

Afin de reproduire les simulations décrites dans [7], nous avons programmé le modèle (IV.10)-(IV.12) en MatLab.

Exemple de décongestion et de congestion

Dans toute la suite, les données initiales seront représentées sur les graphiques par des pointillés bleus ---. Sur les graphiques de gauche, on observera la densité et sur ceux de droite, la vitesse.

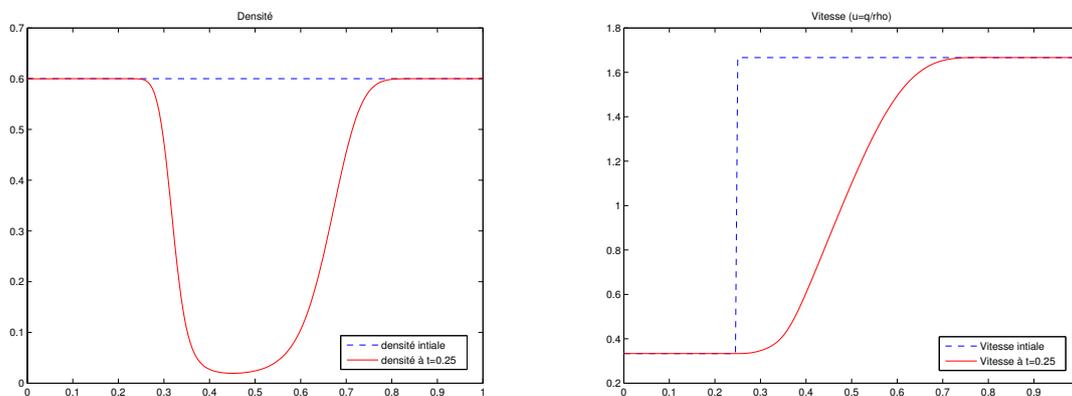


FIGURE 3 – Décongestion à $t = 0,25$ pour le schéma semi-implicite en pression (IV.12) et (IV.10) ($\varepsilon = 10^{-3}$, $\Delta x = 5.10^{-3}$, $\Delta t = 5.10^{-5}$, $\gamma = 1$).

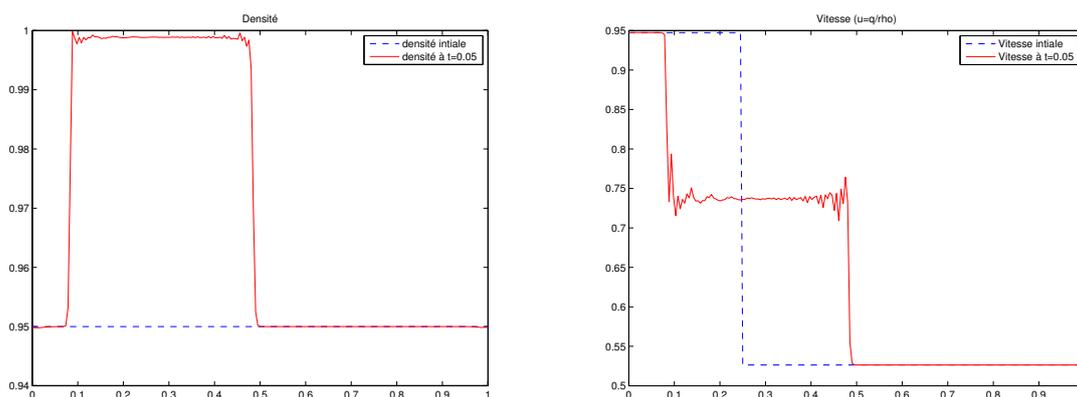


FIGURE 4 – Congestion à $t = 0,05$ pour le schéma semi-implicite en pression (IV.12) et (IV.10) ($\varepsilon = 10^{-3}$, $\Delta x = 5.10^{-3}$, $\Delta t = 5.10^{-5}$, $\gamma = 1$).

Les figures 3 et 4 représentent l'évolution en temps de la densité et de la vitesse pour des conditions initiales différentes. La figure 3 est un exemple de décongestion et la figure 4 illustre une congestion. On notera l'importance des oscillations dans le cas de congestion, notamment pour la vitesse. Ce phénomène ne dépend pas de la précision imposée dans les méthodes de Newton, mais peut être réduit en diminuant les pas en temps et d'espace. En effet, dans ce cas, les oscillations restent localisées aux extrémités des zones de changement de dynamique.

Difficultés rencontrées

Pour calculer p_1^{n+1} à partir de la formule (IV.10), il faut connaître au temps précédent la densité ; aussi, il est proposé dans l'article [7] d'utiliser la méthode de Newton pour déterminer ρ^n à partir de p_1^n . Étant données les brusques variations de dynamique que l'on cherche à observer, utiliser comme point de départ pour la méthode de Newton la densité au temps précédent s'est avéré être une approximation trop grossière. Pour pallier à ce problème, nous avons fait une dichotomie pour calculer une première approximation de ρ^n , puis à l'aide de la méthode de Newton, nous avons déterminé une approximation plus fine.

L'une des contraintes imposées par le modèle est d'avoir toujours $\rho < \rho^*$; aussi, écrire le schéma numérique en terme de pression permet d'éliminer cette contrainte comme le souligne [7], car la pression (en particulier p_1) peut être infinie. Néanmoins, au-delà d'une certaine taille, *MatLab* ne sait plus gérer les nombres. Pour pallier à ce problème, qui apparaît dans les cas de congestion, nous avons imposé une contrainte supplémentaire sur p_1 , afin de le fixer au delà d'une certaine valeur. L'autre piste explorée dans la suite de ce mémoire est le calcul en densité plutôt qu'en pression.

Le schéma numérique tel que nous l'avons programmé est sensible à la densité de transition³ dans le sens qu'il diverge dès que la densité s'approche de cette valeur critique. Une piste pourrait être de vérifier si le problème est dû aux erreurs de calcul issues du changement de méthode pour calculer la dérivée de l'application $p_1 \mapsto \rho$ qui intervient dans le calcul de la Jacobienne.

IV.C) Comparaison avec le schéma implicite en pression (IV.4)

Schéma et exemple

Étant donné les difficultés rencontrées dans la mise en oeuvre du schéma semi-implicite en pression et l'impossibilité de réaliser des simulations dans le cas général, une première alternative a été de tester la version implicite en pression du modèle numérique (IV.4), c'est-à-dire le schéma semi-discrétisé (IV.4). Après discrétisation en espace, le schéma est donné par l'équation (IV.12) et

$$\begin{aligned} \rho(p_j^{n+1}) - \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \varepsilon [p_{j+2}^{n+1} - 2p_j^{n+1} + p_{j-2}^{n+1}] &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{j+1}^n - q_{j-1}^n) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{C}_{j+\frac{1}{2}}^n (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) - \tilde{C}_{j-\frac{1}{2}}^n (\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) \right) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \left(\tilde{F}_{j+\frac{3}{2}}^n - \tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{F}_{j-\frac{1}{2}}^n + \tilde{F}_{j-\frac{3}{2}}^n \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

et, en remplaçant le flux et le coefficient de diffusion local par :

$$\tilde{C}_{j+\frac{1}{2}}^n = \max \left\{ \left| \frac{q_j^n}{\rho_j^n} \right|, \left| \frac{q_{j+1}^n}{\rho_{j+1}^n} \right| \right\} \quad \tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[\frac{(q_j^n)^2}{\rho_j^n} + \frac{(q_{j+1}^n)^2}{\rho_{j+1}^n} \right] - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j+\frac{1}{2}}^n (q_{j+1}^n - q_j^n) \quad (\text{IV.14})$$

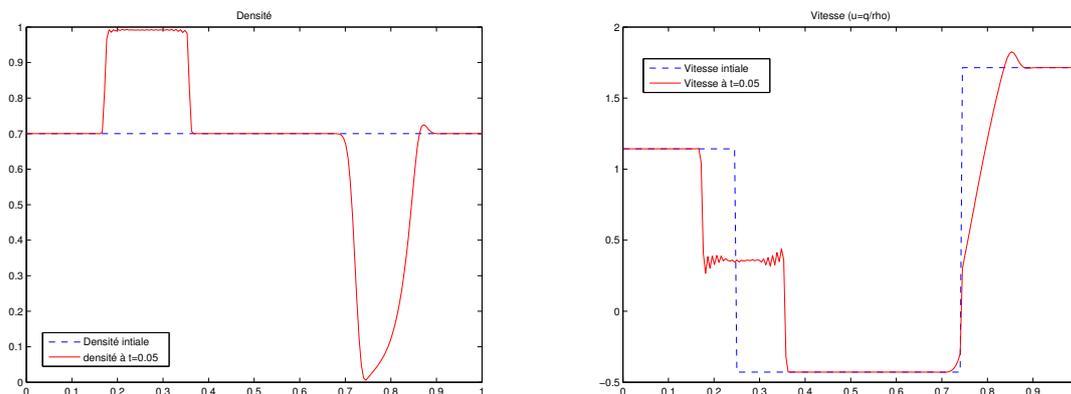


FIGURE 5 – Cas général à $t = 0,05$ pour le schéma implicite en pression ($\varepsilon = 10^{-4}$, $\Delta x = 5.10^{-3}$, $\Delta t = 5.10^{-4}$, $\gamma = 2$).

Sur les graphiques 5, sont représentés la vitesse et la densité dans un cas général. Sur la première partie, on observe une congestion due au fait que la vitesse soit plus importante en amont et sur la seconde

3. Valeur pour laquelle l'expression de p_0 change ($\rho^* - \delta$).

partie une décongestion qui est le résultat d'une vitesse plus importante en aval. On notera au passage qu'ici $\Delta t = 5.10^{-4}$ contrairement aux figures 3 et 4, où $\Delta t = 5.10^{-5}$ pour un ε plus petit. Ceci est dû à la stabilité des schémas implicites.

Comparaison avec le schéma semi-implicite en pression

Sur le graphique 6, on compare les schémas implicites et semi-implicites dans un cas de congestion. On observe que le schéma semi-implicite ne permet pas réellement de réduire les oscillations par rapport au schéma implicite, en particulier dans les cas congestion où elles sont très présentes. Néanmoins, le nombre d'itérations à chaque pas de temps pour déterminer la pression est drastiquement réduit. Il faut en moyenne 22.10^3 itérations pour le schéma implicite contre 12,5 itérations pour le schéma semi-implicite, d'où une réduction importante du temps de calcul.

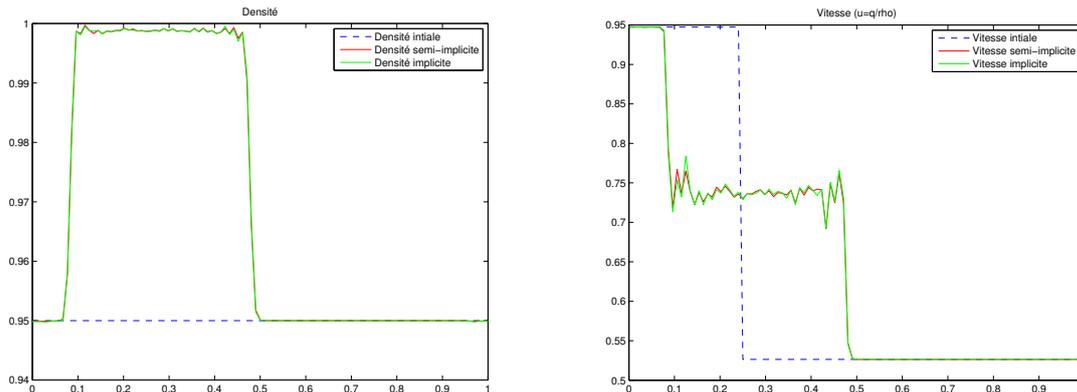


FIGURE 6 – Comparaison des schémas en pression dans un cas de congestion pour $t = 0,05$ ($\varepsilon = 10^{-3}$, $\Delta x = 1.10^{-2}$, $\Delta t = 1.10^{-4}$).

IV.D) Schéma en densité

Schéma semi-implicite en densité

Modifier le schéma implicite en pression donné par les équations (IV.10)-(IV.12) revient à remplacer l'équation (IV.10) par :

$$\begin{aligned} \rho_j^{n+1} - \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} \right)^2 \varepsilon [p_1(\rho_{j+2}^{n+1}) - 2p_1(\rho_j^{n+1}) + p_1(\rho_{j-2}^{n+1})] &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{j+1}^n - q_{j-1}^n) \\ + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(C_{j+\frac{1}{2}}^n (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) - C_{j-\frac{1}{2}}^n (\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) \right) &+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \left(F_{j+\frac{3}{2}}^n - F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n + F_{j-\frac{3}{2}}^n \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

en conservant pour le flux et la densité les formules données par (IV.11).

Schéma implicite en densité

La version implicite du schéma est donnée par (IV.12) et par

$$\begin{aligned} \rho_j^{n+1} - \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} \right)^2 \varepsilon [p(\rho_{j+2}^{n+1}) - 2p(\rho_j^{n+1}) + p(\rho_{j-2}^{n+1})] &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q_{j+1}^n - q_{j-1}^n) \\ + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\tilde{C}_{j+\frac{1}{2}}^n (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) - \tilde{C}_{j-\frac{1}{2}}^n (\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) \right) &+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \left(\tilde{F}_{j+\frac{3}{2}}^n - \tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{F}_{j-\frac{1}{2}}^n + \tilde{F}_{j-\frac{3}{2}}^n \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

avec pour le flux et le coefficient de diffusion local les formules données par (IV.14).

Comparaisons des schémas en densité

On se place à nouveau dans les conditions de la figure 5 pour comparer les deux schémas ci-dessus. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 7 et la figure 8 représente un agrandissement des oscillations. Afin de mieux comprendre l'influence du découpage de la pression dans ce schéma, nous avons

également représenté les résultats obtenus avec un troisième schéma que l'on appellera *demi-pression*. Celui-ci est donné par les équations (IV.12) et (IV.15) mais en prenant pour définition pour la partie explicite de la pression $p_0 = \frac{1}{2}p$ sur $[0, \rho^*]$.

Premièrement, on observe que les résultats obtenus avec ces trois schémas sont cohérents entre eux et avec les schémas en pression. D'autre part, on observe que la division de la pression en une partie implicite et une partie explicite permet bien, en effet, de réduire les oscillations, en particulier dans les zones de congestion. On observe également que si l'on prend la partie explicite en pression égale à $\frac{1}{2}p$, les oscillations disparaissent. Néanmoins, nous le verrons dans la suite, ce schéma ne permet pas de conserver le comportement asymptotique pour des petites valeurs de ε .

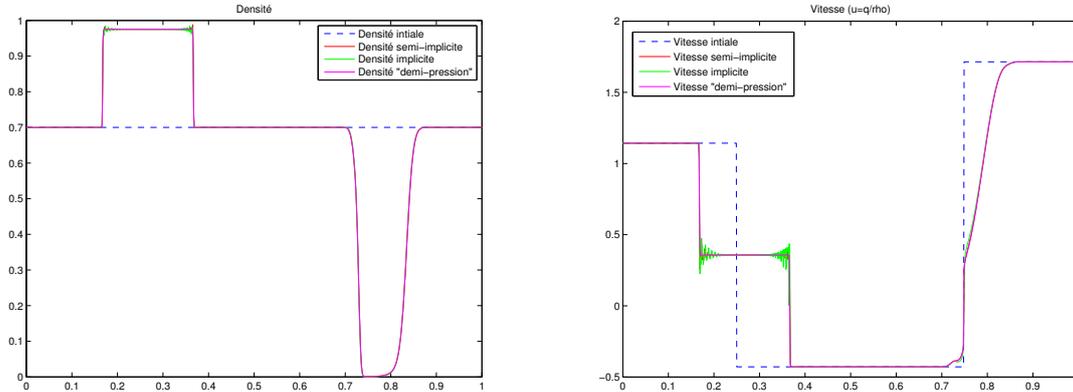


FIGURE 7 – Comparaisons dans le cas général des schéma semi-implicite et implicite en densité ($\varepsilon = 10^{-4}$, $\Delta x = 5.10^{-3}$, $\Delta t = 5.10^{-4}$, $\gamma = 2$).

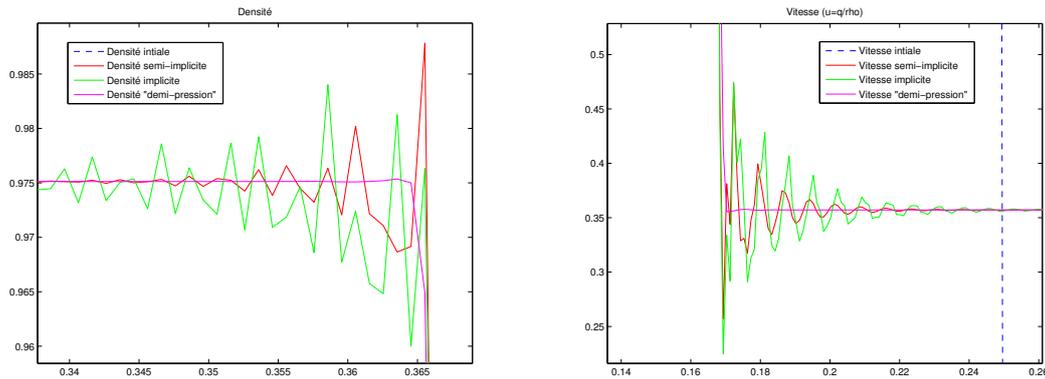


FIGURE 8 – Agrandissement des oscillations.

Comportement asymptotique des schémas en densité

Rappelons que l'un des objectifs est d'obtenir un schéma qui préserve le comportement asymptotique du système lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans le tableau suivant, on présente à $\Delta x = 1.10^{-3}$ et $\Delta t = 1.10^{-4}$ fixés le nombre moyen d'itérations pour la méthode de Newton vectoriel (à chaque pas de temps) en fonction des schémas.

Valeur de ε	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
Schéma implicite	3,9976	3,9958	4,4656	erreur	erreur	erreur	erreur
Schéma semi-implicite	4,0056	4,9878	6,5378	9,6778	19,7288	47,5646	118,2664
Schéma avec $p_0 = \frac{1}{2}p$	3,992	3,717	3,6632	3,8576	3,9682	erreur	erreur

On constate que le découpage de la pression permet d'avoir un programme fonctionnel pour de très petites valeurs de ε .

D'autre part, nous constatons que sur la figure 9, plus la valeur de ε est petite, plus la séparation des différentes dynamiques est claire, ce qui correspond au comportement attendu.

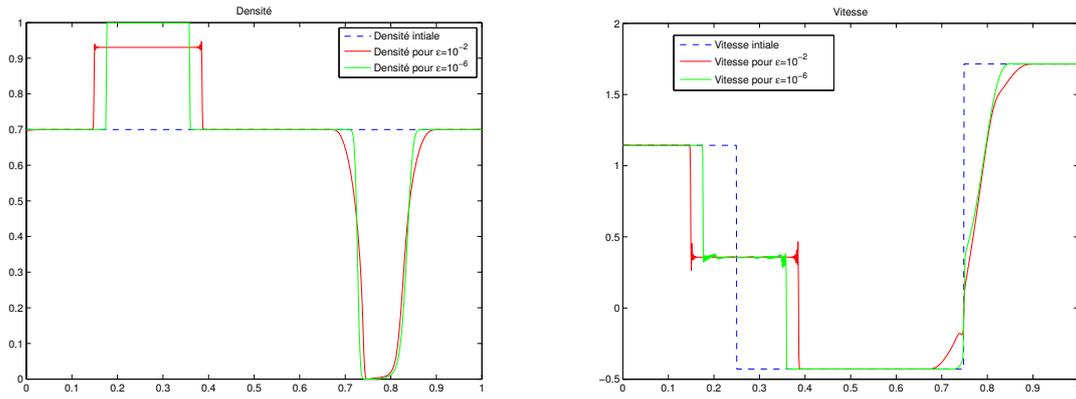


FIGURE 9 – Comparaisons pour différentes valeurs de ε .
 $(\varepsilon \in \{10^{-2}, 10^{-6}\}, \Delta x = 1.10^{-3}, \Delta t = 1.10^{-4}, \gamma = 2)$.

IV.E) Conclusion

En ce qui concerne les trois schémas en densité testés ci-dessus, nous constatons que le schéma totalement implicite produit beaucoup d'oscillations. De plus, pour de petites valeurs de ε , il impose de choisir le pas de temps et d'espace extrêmement petits ce qui augmente considérablement le temps de calcul. En ce qui concerne le schéma *demi-pressure*, il a l'avantage de ne pas produire d'oscillations ; néanmoins, si l'on veut réaliser des simulations pour de très petites valeurs de ε , il faut, dans une certaine mesure diminuer, les pas de temps et d'espace.

Le schéma *semi-implicite*, quant à lui, produit quelques oscillations mais il est capable de simuler le comportement du système pour de très petites valeurs de ε pour des pas de temps et d'espace raisonnables.

V) Perspectives

La suite du stage sera consacrée à l'adaptation des schémas numériques étudiés dans la partie IV au modèle *RMAR* donné par les équations (I.5). Dans un second temps, on cherchera à modifier le schéma numérique pour simuler le comportement de la solution du système (I.7). D'autre part, [6] propose un schéma pour modéliser le comportement (I.5) ; aussi, une comparaison entre ces deux schémas numériques est prévue, notamment lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Bibliographie

- [1] A. AW and M. RASCLE. Resurrection of "second order" models of traffic flow? *SIAM J. APPL. MATH*, 60 :916–938, 2000.
- [2] F. BERTHELIN. Existence and weak stability for a pressureless model with unilateral constraint. *M3AS, Mathematical Models & Methods in Applied Science*, 12(2) :249–272, 2002.
- [3] F. BERTHELIN and D. BROIZAT. A model for the evolution of traffic jams in multilane. *Kinetic and Related Models*, 5(4) :697–728, 2012.
- [4] F. BERTHELIN, P. DEGOND, M. DELITALA, and M. RASCLE. A model for the formation and evolution of traffic jams. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 187 :185–220, 2008.
- [5] H. BREZIS. *ANALYSE FONCTIONNELLE*, volume Théorie et application of *Mathématiques appliquées pour le master*. Dunod, Paris, 2005.
- [6] P. DEGOND. Modeling and simulation of vehicular traffic jam formation. *Kinetic and Related Models*, 1(2) :279–292, June 2008.
- [7] P. DEGOND, J. HUA, and L. NAVORET. Numerical simulations of the euler system with congestion constraint. *Journal of Computational Physics*, 230 :8057–8088, Juillet 2011.
- [8] R. J. LEVEQUE. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge university press, première édition, 2002.
- [9] M. J. LIGHTHILL and G. B. WHITHAM. On kinematic waves : 1) flow movement in long rivers 2) a theory of traffic flow on long crowded rods. *Proc. Roy. Soc., A* 229 :1749–1766, 1955.
- [10] P. RICHARDS. Shock waves on a highway. *Operation research*, 4 :42–51, 1956.