L2 Introduction à l'analyse numérique - Printemps 2019
Correction de l'exercice 4 du TD 1

Février 2019

1 Rappels: Cours & Notations

Par définition

$$h_i(x) = L_i^2(x)\Big(1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)\Big) \tag{1a}$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{1b}$$

$$Q(y) = f(y) - H_n(y) - (f(x) - H_n(x))\frac{\prod_{i=0}^n (y - x_i)^2}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)^2} \tag{1c}$$

avec

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{2a}$$

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}. \tag{2b}$$

Question 1:

Montrons que $h_i(x_j) = \delta_{ij}$:

Cas $i = j$: D'après la formule (2b), on a $L_i(x_j) = 0$ donc il vient $h_i(x_j) = 0$,

Cas $i \neq j$: D'après la formule (2b) $L_i(x_j) = 1$ et $1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i) = 1$ donc il vient $h_i(x_j) = 1$.

La dérivée de $h_i(x)$ est

$$h_i'(x) = 2L_i'(x)L_i(x)\Big(1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)\Big) + 2L_i'(x_i)L_i^2(x) \tag{3}$$

on en déduit alors comme précédemment en utilisant (2b) que $h_i'(x_j) = 0$ si $i \neq j$. Si $i = j$ alors il vient $h_i'(x_i) = 2L_i'(x_i) - 2L_i'(x_i) = 0$.

Encore une fois, en utilisant (2b) il vient que $\tilde{h}_i(x_j) = 0$ pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$. La dérivée de $\tilde{h}_i(x)$ est

$$\tilde{h}_i'(x) = L_i^2(x) + 2(x - x_i)L_i'(x)L_i(x) \tag{4}$$

on en déduit alors en utilisant (2b) que $\tilde{h}_i'(x_j) = \delta_{ij}$.

Question 2:

D'après la question 1 on en déduit directement que H_n vérifie les conditions requises.

Montrons que H_n est unique polynôme de degré $2n+1$ qui satisfait ces conditions. Supposons qu'il existe P_n un polynôme de degré au plus $2n+1$ qui satisfait également ces conditions et posons $R_n(x) = P_n(x) - H_n(x)$ alors R_n est un polynôme de degré au plus $2n+1$. De plus, par définition pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$ on a $R_n(x_i) = R_n'(x_i) = 0$ donc $R_n(x)$ est divisible par $(x-x_i)^2$ pour tout i et donc par $\prod_{i=0}^n (x-x_i)^2$ qui est de degré 2n+2 (ie. R_n à $2n+2$ racines) donc $R_n(x) = 0$.

Question 3

Clairement en remplaçant y par x dans l'équation (1c) il vient $Q(x) = 0$. Par définition de H_n il vient directement que $Q(x_i) = Q'(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$.

Le polynôme Q s'annule n+2 fois: en x et en $x_0,\dots,x_n$. Donc d'après le théorème de Rolle, Q' s'annule n+1 fois en des points qui ne sont pas les noeuds. De plus d'après ce qui précède Q' s'annule aux n+1 noeuds, donc au total Q' s'annule en au moins 2n+2 points distincts. Par application du lemme du cours (voir remarque ci dessous) $Q^{(2n+2)}$ s'annule au moins en un point η_x. C'est à dire $Q^{(2n+2)}(\eta_x) = 0$.

D'autre part, la dérivé $2n+2$ de $\prod_{i=0}^n (y-x_i)^2$ est

$$\left(\prod_{i=0}^{n} (y-x_i)^2\right)^{(2n+2)} = (2n+2)! \tag{5}$$

car c'est un polynôme de degré $2n+2$ et de coefficient dominant 1. On en déduit alors que

$$0 = Q^{(2n+2)}(\eta_x) = f^{(2n+2)}(\eta_x) - 0 - (f(x) - H_n(x)) \frac{(2n+2)!}{\prod_{i=0}^n (x-x_i)^2} \tag{6}$$

puis l'inégalité

$$|f(x) - H_n(x)| \leqslant \left\| f^{(2n+2)} \right\|_\infty \frac{\prod_{i=0}^n |x-x_i|^2}{(2n+2)!} \tag{7}$$

Remarque: Si une fonction $f \in \mathscr{C}^n(I)$ s'annule en n points alors f' s'annule en $n-1$ points et ainsi de suite pour ses dérivées.