Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Intro. Analyse Num. L2- Printemps 2019

Série d'exercices n°1
Interpolation polynomiale

Exercice 1. *Formule des Différences Divisées (Un classique)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme d'interpolation de f aux $n+1$ points distincts $x_0, \cdots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$.

1. Montrer que la famille de polynômes :
$$\mathcal{E} = \left\{1, (X - x_0), (X - x_0)(X - x_1), \cdots, \prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)\right\}$$
est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère à présent la décomposition de P_n dans cette base :
$$P_n(X) = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)\,,$$
où les a_i , $i = 0, \cdots, n$ sont des réels.

2. (a) Montrer que $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.
   (b) On suppose $n \geq 2$. Montrer que pour tout entier i vérifiant $2 \leq i \leq n$,
$$a_i = \frac{f(x_i) - \left[a_0 + a_1(x_i - x_0) + \cdots + a_n \displaystyle\prod_{k=0}^{i-2}(x_i - x_k)\right]}{\displaystyle\prod_{k=0}^{i-1}(x_i - x_k)}\,.$$

3. Montrer par récurrence (sur i) que pour tout entier naturel $i \leq n$, les coefficients a_i ne dépendent que des points $x_0, \cdots, x_i$ (et pas des $x_{i+1}, \cdots, x_n$).

On pose alors $a_i = f[x_0, \cdots, x_i]$ pour tout $i = 0, \cdots, n$, de sorte que
$$P_n(X) = f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n] \prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)\,. \tag{1}$$

4. Pour tout $i = 0, \cdots, n$, on pose $y_i = x_{n-i}$. Notons que $(y_i)_{i=0,\cdots,n}$ et $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$ définissent la même famille de points, et donc le même polynôme interpolateur P_n.

   (a) Écrire la décomposition de P_n , sous la forme (1) dans la base :
   $$\mathcal{F} = \left\{ 1, (X - y_0), (X - y_0)(X - y_1), \cdots, \prod_{k=0}^{n-1}(X - y_k) \right\}$$
   .

   (b) On considère l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{E}$ donnée par (1) et celle dans la base $\mathcal{F}$ obtenue à la question précédente. En raisonnant sur les termes d'ordre n, montrer que $f[x_0, \cdots, x_n] = f[x_n, \cdots, x_0]$.

   (c) Déterminer le terme d'ordre $n-1$ du polynôme $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$. En déduire le terme d'ordre $n-1$ du polynôme P_n donné par (1).

   (d) En considérant à nouveau l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{F}$, et en raisonnant sur les termes d'ordre $n-1$, montrer que
   $$f[x_0, \cdots, x_{n-1}] - f[x_0, \cdots, x_n]\sum_{k=0}^{n-1} x_k = f[y_0, \cdots, y_{n-1}] - f[y_0, \cdots, y_n]\sum_{k=0}^{n-1} y_k .$$

   (e) En déduire que $f[x_0, \cdots, x_n] = \dfrac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$.

On suppose à présent que f est $(n+1)$ fois dérivable.

5. Dans cette question, on fixe $x \in [a, b]$, distinct des $x_0, \cdots, x_n$, et on considère le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \cdots, x_n, x$:
   $$P_{n+1}(X) = f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n, x]\prod_{k=0}^{n}(X - x_k) .$$

   (a) Montrer que $P_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!f[x_0, \cdots, x_n, x]$.

   (b) On considère la fonction définie par $e_{n+1}(t) = f(t) - P_{n+1}(t)$ pour tout réel t. Montrer que e'_{n+1} s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a, b[$.

   (c) Montrer que $e_{n+1}^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$. En déduire qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que
   $$f[x_0, \cdots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} .$$

6. Montrer que pour tout réel x, on a :
   $$f(x) - P_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \{x_0, \cdots, x_n\} , \\ f[x_0, \cdots, x_n, x]\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x - x_k) \text{ sinon} . \end{cases}$$

7. En déduire que si $x_0, \cdots, x_n$ sont des réels distincts d'un intervalle $[a,b]$, on a, pour tout $x \in [a,b]$:
$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| ,$$
où $M_{n+1} = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.
8. **Application.** On s'intéresse à la fonction $f : x \in [0,2] \longmapsto \sin(\pi x/2)$.
   (a) En se basant sur (1), déterminer le polynôme interpolateur de f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
   (b) Établir une estimation d'erreur.

Exercice 2. *Un exemple de polynôme d'interpolation*
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
1. Déterminer le polynôme P_1 d'interpolation de Lagrange aux noeuds 0 et 1.
2. Déterminer le polynôme P_2 d'interpolation de Lagrange aux noeuds 0, $1/2$ et 1. On l'écrira sous forme de Lagrange et sous forme de Newton.

Exercice 3. *Convergence de l'interpolation de Lagrange*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et α un réel vérifiant $|\alpha| > 1$. On note L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction
$$f(x) = \frac{1}{x-\alpha}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$
aux $n+1$ points distincts $x_0, ..., x_n$ de l'intervalle $[-1,1]$.
1. Le but de cette question est de montrer que si $|\alpha| > 3$, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$
Nous rappelons le résultat suivant, déduit de l'étude générale menée à l'exercice 1 :
$$\forall x \in [-1,1] \ , \ \exists \xi \in]-1,1[\quad , \quad f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_n(x) \,,$$
avec $\Pi_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$.
   (a) Calculer les dérivées successives de la fonction f.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\forall x \in [-1,1] \ , \ |\Pi_n(x)| \leq 2^{n+1} \,.$$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\xi \in]-1,1[$:
$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \leq \sup_{t\in]-1,1[} \left(\frac{1}{|t-\alpha|^{n+2}} \right) .$$

(d) On suppose $|\alpha| > 3$. Montrer qu'il existe un réel $p > 0$ tel que

$$|\alpha - t| \geq 2 + p \text{ pour tout } t \in]-1, 1[\,.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

(e) Conclure.

2. Considérons toujours la fonction f

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

aux $n+1$ points distincts $x_0, ..., x_n$ équidistants de l'intervalle $[-1, 1]$. Dans la pratique nous n'agissons pas du tout comme ce qui précède. Nous préférons utiliser des polynômes de degré peu élevé sur chaque petit intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

(a) Écrire le polynôme interpolateur de Lagrange de degré 1 f_n de f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, ..., n-1$

(b) On considère un maillage uniforme de l'intervalle $[a, b]$, c'est à dire que $x_{i+1} - x_i = \dfrac{\ell}{n}$ pour tout $i = 0, \cdots, n-1$, où ℓ est la longueur de l'intervalle.

i. Monter que, pour tout $i = 0, \cdots, n-1$ et tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$|(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leq \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4}\,.$$

ii. En déduire que :

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{c}{n^2}$$

et donc que f_n converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4. *Interpolation Polynomiale de Hermite*

Soient $x_0, ..., x_n$, $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b)$ et f de classe $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction dont on connaît les valeurs et celles de sa dérivée en ces $(n+1)$ points distincts.

Nous cherchons un polynôme H_n de degré minimal tel que

$$H_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{et } H'_n(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Nous rappelons que les fonctions de base de l'interpolation de Lagrange, c'est à dire les polynômes de degré n tels que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 0, ..., n$ sont donnés pour tout $i = 0, ..., n$ par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous allons montrer le résultat suivant :

"Le polynôme H_n est de degré au plus $2n+1$, et s'écrit

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\tilde{h}_i(x)$$

avec

$$h_i(x) = (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i))L_i^2(x), \quad \text{et} \quad \tilde{h}_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x).$$

De plus, si $f \in \mathscr{C}^{2(n+1)}([a, b], \mathbb{R})$

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2(n+1))}\|_\infty}{(2n + 2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2.\text{''}$$

1. Montrer que pour $i, j = 0, ..., n$

   $$h_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad h_i'(x_j) = 0,$$

   et

   $$\tilde{h}_i(x_j) = 0, \quad \tilde{h}_i'(x_j) = \delta_{i,j}.$$

2. En déduire que H_n est l'unique polynôme de degré $2n + 1$ vérifiant les conditions requises.
3. Supposons $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$, et posons

   $$Q(y) = f(y) - H_n(y) - \big(f(x) - H_n(x)\big) \frac{\prod_{i=0}^{n}(y - x_i)^2}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2}.$$

   Montrer que $Q(x) = 0$, et que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $Q(x_i) = Q'(x_i) = 0$.
   En déduire que Q' s'annule en au moins $2n + 2$ points distincts.
   Montrer (en appliquant le théorème de Rolle) qu'il existe η_x tel que $Q^{(2n+2)}(\eta_x) = 0$. Conclure.

<u>Exercice 5.</u> *Polynôme de Tchebychev*
Soit $n \in \mathbb{N}$, nous définissons le polynôme de Tchebychev de première espèce par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \, x \in [-1, 1].$$

1. Montrer que les fonctions T_n satisfont la formule de récurrence

   $$\begin{cases} T_0(x) & = & 1, \quad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) & = & 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{cases}$$

2. Montrer que T_n est un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est 2^{n-1}.
3. Montrer ensuite que les polynômes T_n sont orthogonaux par rapport à la fonction poids $(1 - x^2)^{-1/2}$, c'est à dire :

   $$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \, \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \pi, & \text{si} \quad n = m = 0, \\ \pi/2, & \text{si} \quad n = m \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad n \neq m. \end{cases}$$

4. On pose $t_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$ et $y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k = 0, ..., n$. Calculer $t_n(y_k)$ pour tout $k = 0, ..., n$. En déduire que $\|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$
5. Soient $x_1, ..., x_n$, n points quelconques de $[-1,1]$. Nous posons $w_n(x) = (x-x_1)...(x-x_n)$. Supposons par l'absurde que $\|w_n\|_\infty < \|t_n\|_\infty$.
   (a) On pose $d = t_n - w_n$. Montrer que d est un polynôme de degré au plus $n-1$.
   (b) Montrer que
   $$\begin{cases} t_n(y_k) - w_n(y_k) > 0, & \text{si} \quad k \quad \text{est} \quad \text{pair}, \\ t_n(y_k) - w_n(y_k) < 0, & \text{si} \quad k \quad \text{est} \quad \text{impair}. \end{cases}$$
   (c) En déduire que $\|w_n\|_\infty \geq \|t_n\|_\infty$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous notons $\eta_0, \cdots, \eta_{n-1}$ les racines de T_n, appelés *points de Tchebychev.*
   (a) Déterminer les points de Tchebychev du polynôme T_n.
   (b) En déduire l'expression de t_n en fonction des points de Tchebychev.
7. Application - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, P_{n-1} le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f définie pour tout $x > -2$ par $f(x) = \ln(x+2)$ aux points de Tchebychev. Déterminer un n tel que
   $$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\ln(x+2) - P_{n-1}(x)| \leq 2^{-10}.$$

Exercice 6. *Splines cubiques*
Dans cet exercice, nous souhaitons interpoler une fonction $f \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ par une fonction cubique par morceaux. C'est que nous appelons une *spline cubique*.
Pour cela nous définissons $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$, qui déterminent une partition de l'intervalle $[a,b]$, avec $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$.
Nous appelons spline cubique, une fonction S vérifiant

1. $S \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$,
2. $S\,|_{[x_i,x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré 3 pour $i = 0, ..., n$.

Pour construire une telle approximation, nous cherchons à définir une spline S en fonction seulement de ses valeurs aux points x_i et de sa dérivée seconde en x_i.

1. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 défini sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ par ses valeurs $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P''(\alpha)$, $P''(\beta)$.
   (a) Montrer que
   $$\frac{P''(x) - P''(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{P''(\beta) - P''(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$
   (b) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P'(x) = v + P''(\alpha)(x-\alpha) + \frac{P''(\beta) - P''(\alpha)}{2(\beta - \alpha)}(x-\alpha)^2.$$

(c) Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(x) = u + v(x-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + \frac{P''(\beta) - P''(\alpha)}{6(\beta-\alpha)}(x-\alpha)^3 .$$

(d) Déterminer u et v en fonction de $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P''(\alpha)$, $P''(\beta)$. En déduire que P est unique.

2. On se propose de démontrer qu'il existe une unique spline cubique S interpolant f au sens suivant

$$\begin{cases} S(x_i) &= f(x_i), \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n+1 \\ S'(a) &= f'(a), \quad S'(b) = f'(b). \end{cases}$$

(a) Montrer que

$$P'(\beta) = \frac{P(\beta) - P(\alpha)}{\beta - \alpha} + (2P''(\alpha) + P''(\beta))\,\frac{\beta-\alpha}{6} .$$

(b) En considérant le polynôme P de degré 3 tel que pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $S\,|_{[x_{i-1},x_i]}\,(x) = P(x)$, montrer que

$$S'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + (S''(x_{i-1}) + 2S''(x_i))\,\frac{x_i - x_{i-1}}{6}$$

(c) Montrer que

$$\begin{aligned}(S''(x_{i-1}) + 2S''(x_i))\,\frac{x_i - x_{i-1}}{6} + &\quad (S''(x_{i+1}) + 2S''(x_i))\,\frac{x_{i+1} - x_i}{6} \\ &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\end{aligned}$$

Indication : on pourra considérer le polynôme de Q de degré 3 tel que pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $S\,|_{[x_i,x_{i+1}]}\,(x) = Q(x)$ afin d'obtenir une autre égalité pour $S'(x_i)$.

(d) Montrer que

$$(2S''(x_0) + S''(x_1))\,\frac{x_1 - x_0}{6} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f'(a) .$$

(e) De même, déterminer $(2S''(x_n) + S''(x_{n+1}))$ en fonction de x_n, x_{n+1}, $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$ et $f'(b)$.

(f) Montrer que le vecteur $S'' = (S''_0, \cdots S''_{n+1})$ où $S''_i = S''(x_i)$ pour $i = 0, \cdots, n+1$ est l'unique solution d'un système à $n+2$ équations. Conclure.

3. En prenant pour $i \in \{0, ..., n+1\}$ la fonction spline S_i telle que

$$S_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq i, \\ 1, & \text{si } j = i. \end{cases}$$

et $S'_i(a) = S'_i(b) = 0$, puis les splines S_a et S_b telles que $S_a(x_i) = S_b(x_i) = 0$, et $S'_a(a) = S'_b(b) = 1$ et $S'_b(a) = S'_a(b) = 0$, montrer qu'une fonction spline S interpolant f sur $[a, b]$ s'écrit

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n+1} f_j S_j(x) + \sum_{\alpha \in \{a,b\}} f'_\alpha S_\alpha(x) .$$